Übungsblatt 5

Besprechung der mündlichen Aufgaben am 17.–20. 11. 2009
Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 9:10 am 24. 11. 2009

Aufgabe 32 Zeigen Sie, dass die Klasse der regulären Sprachen ***mündlich***

(a) weder unter Teilmengen- noch unter Obermengenbildung,

(b) weder unter Durchschnitt noch unter Vereinigung über unendlich vielen Sprachen

abgeschlossen ist.

Aufgabe 33 ***4 Punkte***

Die folgenden Sprachen sind nicht regulär. Beweisen Sie dies, indem Sie jeweils unendlich viele bzgl. R_L paarweise nicht äquivalente Wörter angeben.

(a) $L_1 = \{ww^R \mid w \in \{0,1\}^*\}$, *(mündlich)*

(b) $L_2 = \{a^n b^m \mid n > m > 0\}$. *(4 Punkte)*

Aufgabe 34 ***mündlich***

Sei L eine Sprache, die von einem DFA M mit m Zuständen erkannt wird. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) Ist L endlich, so enthält L nur Wörter der Länge $\le m-1$.

(b) Wenn es in L ein Wort w gibt, das 1^m als Teilwort enthält, dann gibt es für jede Zahl $k \ge 1$ ein Wort in L, das 1^k enthält.

Gelten diese Aussagen auch dann noch, wenn M ein NFA ist?

Aufgabe 35 ***10 Punkte***

Eine **linksreguläre** Grammatik darf nur Regeln der Bauart $A \to a$, $A \to Ba$ oder $A \to \varepsilon$ enthalten. Der Begriff einer rechtsregulären Grammatik ist analog definiert, entspricht also dem in der Vorlesung definierten Typ einer regulären Grammatik.

Gegeben seien die beiden Grammatiken

$$G_1 = \big(\{S\},\ \{a,b\},\ \{S \to ababS, abab\},\ S\big) \text{ und}$$
$$G_2 = \big(\{S,T\},\ \{a,b\},\ \{S \to aS, abT;\ T \to aT, abS, ab\},\ S\big).$$

(a) Geben Sie einen regulären Ausdruck sowie eine links- und eine rechtsreguläre Grammatik für die Sprache $L(G_1)$ an. *(mündlich)*

(b) Geben Sie einen regulären Ausdruck sowie eine links- und eine rechtsreguläre Grammatik für die Sprache $L(G_2)$ an. *(6 Punkte)*

(c) Zeigen Sie allgemein, dass eine Sprache genau dann von einer linksregulären Grammatik erzeugt wird, wenn es eine rechtsreguläre Grammatik für sie gibt. *(mündlich)*

(d) Lassen sich mit Grammatiken, die nur Produktionen der Form $A \to a$, $A \to Ba$, $A \to aB$ und $A \to \varepsilon$ enthalten, auch nicht-reguläre Sprachen erzeugen? Begründen Sie Ihre Antwort. *(4 Punkte)*

Aufgabe 36 ***6 Punkte***

Finden Sie Grammatiken für die folgenden Sprachen über $\Sigma = \{a,b\}$:

$L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid \text{in } w \text{ kommt } abab \text{ als Teilwort vor}\}$, *(mündlich)*

$L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid \text{jeder zweite Buchstabe in } w \text{ ist ein } a\}$, *(mündlich)*

$L_3 = \{w \in \Sigma^* \mid \text{in } w \text{ kommen doppelt soviele } a\text{'s wie } b\text{'s vor}\}$. *(6 Punkte)*

Begründen Sie jeweils die Korrektheit Ihrer Grammatik.

Aufgabe 37 ***mündlich***

Sei $A = \{a^i b^j \mid i,j \ge 0\}$.

(a) Geben Sie alle Zerlegungen des Wortes $aaabb$ in Teilwörter uvw an, die für $\ell = 4$ alle drei Bedingungen in der Konklusion des Pumping-Lemmas erfüllen.

(b) Bestimmen Sie die Pumping-Zahl für A.

Aufgabe 38 ***10 Punkte***

Sei B die Menge der Dezimaldarstellungen aller durch 3 teilbaren natürlichen Zahlen.

(a) Geben Sie alle Zerlegungen des Wortes 123456 in Teilwörter uvw an, die für $\ell = 4$ alle drei Bedingungen in der Konklusion des Pumping-Lemmas erfüllen. *(5 Punkte)*

(b) Bestimmen Sie die Pumping-Zahl für B. *(5 Punkte)*

Aufgabe 39 ***mündlich, optional***

Sei A eine *beliebige* Sprache über einem einelementigen Alphabet. Zeigen Sie, dass A^* regulär ist.

Hinweis: Finden Sie eine endliche Sprache $B \subseteq A$ mit $A^* = B^*$.