

Übungsblatt 13

Besprechung der mündlichen Aufgaben am 30.–3. 01. 2012

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 11:10 am 8. 2. 2012

Lehrevaluation bis 27. 01. 2012 unter

<https://evaluation.hu-berlin.de/evaluation>

Aufgabe 99

mündlich

Geben Sie LOOP-, WHILE- und GOTO-Programme für die Funktionen $f(x, y) = x \text{ MOD } y$ und $g(x, y) = x \text{ DIV } y$ an.

Aufgabe 100

mündlich

Für eine Reihe von algorithmischen Problemstellungen wurden 6 verschiedene Algorithmen mit folgenden Laufzeiten entworfen ($\log n$ steht als Abkürzung für $\lceil \log_2 n \rceil$):

Algorithmus	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
Laufzeit	$5 \cdot 10^8 n$	$10^5 n \log n$	$10^3 n^2$	$10 \cdot 2^{n/2}$	2^{2n}	$n!$

Die Algorithmen werden auf einem Rechner implementiert, der mit einer Geschwindigkeit von 10^9 Operationen pro Sekunde arbeitet.

- Bestimmen Sie jeweils die maximale Länge n_1 der Probleminstanzen, die mit diesen Algorithmen innerhalb einer Minute lösbar sind.
- Sei n_2 die maximale Eingabelänge, die ein Rechner mit k -facher Geschwindigkeit in dieser Zeit bewältigt. Welche Beziehung besteht jeweils zwischen n_1 und n_2 ?

Aufgabe 101

mündlich

Betrachten Sie die Menge der Palindrome $L = \{x \in \Sigma^* \mid x = x^R\}$. Beschreiben Sie eine möglichst zeiteffiziente 1-DTM M und eine möglichst zeiteffiziente 2-DTM M' für L . Vergleichen Sie die Laufzeiten von M und M' bei Eingaben der Länge n .

Aufgabe 102

Seien $f, g: \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty)$ Funktionen. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

- $\sum_{i=1}^n i = \mathcal{O}(n^2)$ (*mündlich*)
- $f(n) + \mathcal{O}(g(n)) = \mathcal{O}(f(n) + g(n))$ (*mündlich*)
- $\mathcal{O}(f(n) + g(n)) = f(n) + \mathcal{O}(g(n))$ (*mündlich*)
- $2^{n+\mathcal{O}(1)} = \mathcal{O}(2^n)$ (*mündlich*)
- $f(n) + g(n) = \mathcal{O}(\max\{f(n), g(n)\})$ (*mündlich*)
- Wenn $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$, dann gilt $f^2(n) = \mathcal{O}(g^2(n))$ (*mündlich*)
- Wenn $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$, dann gilt $f(n^2) = \mathcal{O}(g(n^2))$ (*5 Punkte*)
- $2^{\mathcal{O}(n)} = \mathcal{O}(2^n)$ (*5 Punkte*)

Aufgabe 103

Zeigen Sie: (a) $\text{REG} \subsetneq \text{L}$, (b) $\text{CFL} \subsetneq \text{P}$, (c) $\text{L} \not\subseteq \text{CFL}$.

mündlich

Aufgabe 104

Zeigen Sie: (a) $\text{E} \subseteq \text{DTIME}(2^{n^2})$,

(b) $\text{E} \subsetneq \text{EXP}$.

10 Punkte

(*mündlich*)

(*10 Punkte*)

Hinweis: Zeigen Sie, dass die Diagonalsprache

$$D = \{w \mid M_w \text{ ist eine DTM, die } w \text{ in höchstens } 2^{|w|^2} \text{ Schritten verwirft}\}$$

in EXP , aber nicht in $\text{DTIME}(2^{n^2})$ entscheidbar ist.

Aufgabe 105

mündlich, optional

(a) Jede Sprache $A \in \text{DTIME}(t(n))$ ist in Polynomialzeit auf eine Sprache $B \subseteq \{0, 1\}^*$ in $\text{DTIME}(\mathcal{O}(t(n)))$ reduzierbar.

(b) Die Sprache

$$L = \left\{ w \# x \# \text{bin}(m) \mid \begin{array}{l} x \in \{0, 1\}^* \text{ und } M_w \text{ ist eine DTM, die} \\ x \text{ in höchstens } m \text{ Schritten akzeptiert} \end{array} \right\}$$

ist EXP -vollständig ($\text{bin}(m)$ bezeichne die Binärdarstellung von m).

(c) Der Abschluss von E unter \leq^P ist EXP (d. h. $\text{EXP} = \{A \mid \exists B \in \text{E} : A \leq^P B\}$).

(d) E ist nicht unter \leq^P abgeschlossen (also ist $\text{P} \subsetneq \text{E}$ und $\text{E} \neq \text{NP}$).

Hinweis: Verwenden Sie die Separation $\text{E} \subsetneq \text{EXP}$ (siehe [Aufgabe 104](#)).

Aufgabe 106

Zeigen Sie: Die Reduktionsrelation \leq^P ist reflexiv und transitiv, aber nicht antisymmetrisch.

5 Punkte

Aufgabe 107

Stimmen folgende Aussagen? Begründen Sie.

5 Punkte

(a) $\text{P} = \text{NP} \Rightarrow \text{NP} = \text{co-NP}$,

(*mündlich*)

(b) $\text{NP} \subseteq \text{co-NP} \Leftrightarrow \text{co-NP} \subseteq \text{NP}$,

(*mündlich*)

(c) $\text{NP} \cup \text{co-NP}$ ist unter Komplement abgeschlossen,

(*mündlich*)

(d) NP enthält keine co-NP -harte Sprache, außer wenn $\text{NP} = \text{co-NP}$ ist, (*mündlich*)

(e) $\text{NPC} = \text{P} \Rightarrow \text{EXP} = \text{P}$.

(*5 Punkte*)

Aufgabe 108

Zeigen Sie: Die Komplexitätsklassen P und NP sind abgeschlossen unter

10 Zusatzpunkte

(a) Vereinigung, Schnitt, Produkt und

(*mündlich*)

(b) Sternhülle.

(*10 Zusatzpunkte*)

Hinweis: Orientieren Sie sich an der beim CYK-Algorithmus benutzten dynamischen Programmieretechnik.