INSTITUT FÜR INFORMATIK
KOMPLEXITÄT UND KRYPTOGRAFIE
PROF. DR. JOHANNES KÖBLER

WS 2007/08
30. OKTOBER 2007

Theoretische Informatik 2

3. Übung

Besprechung der mündlichen Aufgaben am 6.-9. November
Abgabe der schriftlichen Lösungen am 13. November

Aufgabe 12 [*mündlich*]

Die Sprachen L_1 und L_2 seien definiert als

$$L_1 = \{u \in \{a,b\}^* \mid u \text{ endet mit } b\} \text{ und}$$
$$L_2 = \{v \in \{a,b\}^* \mid \#_a(v) \text{ ist ungerade}\}.$$

a) Geben Sie für L_1 und L_2 je einen DFA mit 2 Zuständen an und konstruieren Sie daraus einen NFA N für $L = L_1L_2$ mit 4 Zuständen.

b) Transformieren Sie N in einen äquivalenten NFA N' mit 3 Zuständen.

c) Konstruieren Sie den zu N' gehörigen „Potenzmengenautomaten".

Aufgabe 13 [*mündlich*]

Ein ENFA (extended NFA) ist ein NFA $N = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$, wobei jedoch δ eine Funktion von einer endlichen Teilmenge von $Z \times \Sigma^*$ in die Potenzmenge von Z ist. Das heißt, Kanten können nicht nur mit Zeichen $a \in \Sigma$, sondern auch mit Wörtern $w \in \Sigma^*$ beschriftet werden. Ist eine Kante mit ε beschriftet, so spricht man von einem „spontanen" Übergang, da der Automat ohne Lesen eines Eingabezeichens den Zustand wechselt.

a) Geben Sie eine formale Definition für die von einem ENFA N erkannte Sprache $L(N)$.

b) Zeigen Sie, dass $\{L(N) \mid N \text{ ist ein ENFA}\} = \mathsf{REG}$ ist.

Aufgabe 14 [*mündlich*]

Betrachten Sie folgende Relation R auf der Menge $A = \{0, 1, \ldots, 9\}$.

$$R = \{(2,4),(3,3),(3,6),(4,1),(4,2),(5,9),(7,5),(7,8),(8,5),(9,8)\}$$

a) Ist R reflexiv, irreflexiv, symmetrisch, asymmetrisch, antisymmetrisch oder transitiv?

b) Veranschaulichen Sie die Relationen R, R^T, $h_{refl}(R)$, $h_{sym}(R)$, R^2, R^3, R^+, R^* durch die zugehörigen gerichteten Graphen.

Aufgabe 15 [*mündlich*]

Sei A die Menge aller Menschen. R_1 bezeichne die Relation „ist verheiratet mit", R_2 die Relation „ist Mutter von"und R_3 die Relation „ist Kind von". Beschreiben Sie umgangssprachlich die folgenden Kompositionen: a) $R_1 \circ R_2$, b) $R_2 \circ R_1$, c) $R_2 \circ R_3$, d) $R_3 \circ R_2$, e) $R_2 \circ R_1 \circ R_3$.

Aufgabe 16 Zeigen Sie: [*mündlich*]

a) R ist symmetrisch $\Rightarrow R^+, R^*$ sind symmetrisch.

b) Für eine Relation R auf einer n-elementigen Menge A ist

$$R^* = \bigcup_{i=0}^{n-1} R^i = (Id \cup R^{2^0}) \circ (Id \cup R^{2^1}) \circ \cdots \circ (Id \cup R^{2^{\lfloor \log(n-1) \rfloor}}).$$

Aufgabe 17 [*mündlich*]

Sind mit E_1, E_2 auch $E_1 \cap E_2, E_1 \cup E_2, E_1 \circ E_2$ Äquivalenzrelationen? Welche der drei Eigenschaften Reflexivität, Symmetrie und Transitivität bleiben erhalten, welche nicht? Beweisen Sie ihre Behauptung.

Aufgabe 18 [*5 Punkte*]

Betrachten Sie die Relation $R = \{(a,a), (a,b), (a,c), (b,b), (b,c)\}$ auf der Menge $A = \{a,b,c,d\}$. Wieviele Paare müssen zu R jeweils mindestens hinzugefügt werden, damit man eine reflexive, symmetrische, antisymmetrische, transitive Relation bzw. eine Äquivalenzrelation auf A erhält. Geben Sie die Paare jeweils an.

Aufgabe 19 Beweisen Sie: [*5 Punkte*]

R ist genau dann transitiv, wenn $R^2 \subseteq R$ gilt.