

Übungsblatt 3

Abgabe bis zum 2. Juni 2009

Aufgabe 13

5 Punkte

Lösen Sie die folgenden Rekursionsgleichungen, indem Sie möglichst enge untere und obere asymptotische Schranken für die Lösungsfunktionen angeben (evtl. in Abhängigkeit vom Anfangswert $T(1) = a$).

- (a) $T(n) = 3T(n/2) + 4T(n/16) + 5n^k$, $k \in \{1, 2, 3\}$, (mündlich)
- (b) $T(n) = bT(n - c)$, $b \geq 0$, $c \geq 1$, (mündlich)
- (c) $T(n) = bT(cn) + dn + e$, $b, d \geq 0$, $0 < c < 1$. (5 Punkte)

Aufgabe 14

mündlich

- (a) Geben Sie den Rekursionsbaum von **QuickSort** für die Eingabefolge $(3, 1, 5, 2, 4)$ an.
- (b) Wie viele Vergleiche benötigt **QuickSort**, um die Eingabefolge $(3, 1, 5, 2, 4)$ zu sortieren?
- (c) Geben Sie den Fragebaum von **QuickSort** für die Sortierung einer Folge von 4 Zahlen an.
- (d) Bestimmen Sie für $n = 1, \dots, 10$ die Fragekomplexität von **QuickSort** im besten, schlechtesten und durchschnittlichen Fall für eine Permutation der Zahlen $1, \dots, n$. Vergleichen Sie diese Werte jeweils mit der unteren Schranke $\lceil \log_2(n!) \rceil$ für den schlechtesten Fall.
- (e) Bestimmen Sie für alle Paare $1 \leq i < j \leq 5$ das erste von **QuickSort** beim Sortieren der Eingabefolge $(3, 1, 5, 2, 4)$ im Intervall $I_{ij} = \{i, \dots, j\}$ gewählte Pivotelement.

Aufgabe 15

mündlich

Zeigen Sie, dass **QuickSort** im Durchschnitt $V(n) = (2 \ln 2) \log_2(n!) - \Theta(n)$ Vergleiche benötigt, um eine Folge von n paarweise verschiedenen Zahlen zu sortieren.

Hinweis: Für die *harmonische Reihe* $H_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$ gilt $\ln(n+1) \leq H_n \leq \ln n + 1$ und $H_n - \ln n - \gamma \sim 1/(2n)$, wobei $\gamma \approx 0,57721$ die Eulersche Konstante ist.

Aufgabe 16

mündlich

Der Algorithmus **RandomQuickSort** ist eine randomisierte Variante von **QuickSort**, bei der nicht das letzte Element des zu sortierenden Arrays sondern ein zufälliges Element als Pivot-Element gewählt wird.

- (a) Bestimmen Sie die (erwartete) Anzahl von Vergleichen, die **RandomQuickSort** im besten, mittleren und schlechtesten Fall vornimmt, um eine Folge von n paarweise verschiedenen Zahlen zu sortieren.

Hinweis: Zeigen Sie, dass sich **RandomQuickSort** bei jeder Eingabefolge verhält wie **QuickSort** bei einer zufälligen Permutation dieser Folge.

- (b) Welche Erwartungswerte ergeben sich für $n = 1, 2, 3, 4$ im schlechtesten und im besten Fall, wenn die Folgenglieder mehrfach vorkommen können?

Aufgabe 17

mündlich

Die *Tiefe* $t(v)$ eines Knotens in einem Baum mit Wurzel w sei die Länge des Pfades von w zu v . Sei B ein Binärbaum mit n Blättern. Zeigen Sie:

- (a) Die maximale Blatttiefe von B beträgt mindestens $\lceil \log_2 n \rceil$.
- (b) Die mittlere Blatttiefe von B beträgt mindestens $\log_2 n$.
- (c) Ein vergleichendes Sortierverfahren benötigt im Durchschnitt mindestens $\log_2(n!)$ Vergleiche, um eine zufällige Permutation der Zahlen $1, \dots, n$ zu sortieren.
- (d) Auch randomisierte vergleichende Sortierverfahren benötigen hierzu im schlechtesten Fall mindestens $\lceil \log_2(n!) \rceil$ und im Durchschnitt mindestens $\log_2(n!)$ Vergleiche.

Aufgabe 18

5 Punkte

- (a) Wie viele Vergleiche benötigt **HeapSort**, um die Eingabefolge $(4, 2, 5, 1, 3)$ zu sortieren? (2 Punkte)

- (b) Geben Sie den Fragebaum von **HeapSort** für die Sortierung von 4 Zahlen an. (3 Punkte)