Humboldt-Universität zu Berlin
Prof. Dr. Johannes Köbler

Übungsblatt 11

Besprechung der mündlichen Aufgaben am 12.–15. 01. 2010
Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 9:10 am 19. 1. 2010

Aufgabe 85 Zeigen Sie: ***mündlich***

(a) Die Reduktionsrelation $\leq$ ist reflexiv und transitiv, aber nicht antisymmetrisch.

(b) Die Klasse RE ist unter $\leq$ abgeschlossen.

(c) Jede entscheidbare Sprache A ist auf die Sprache $B = \{1\}$ reduzierbar (d.h. B ist REC-vollständig).

(d) Jede semi-entscheidbare Sprache A ist auf das spezielle Halteproblem K reduzierbar (d.h. K ist RE-vollständig).

Aufgabe 86 ***mündlich***

Für zwei Sprachen A und B sei die *markierte Vereinigung* $A \oplus B$ definiert durch

$$A \oplus B = \{0x \mid x \in A\} \cup \{1x \mid x \in B\}.$$

Zeigen Sie für beliebige Sprachen A, B und C:

(a) $A \leq A \oplus B$ und $B \leq A \oplus B$.

(b) $A \oplus B$ ist genau dann entscheidbar, wenn A und B entscheidbar sind.

(c) $A \oplus B$ ist genau dann semi-entscheidbar, wenn A und B semi-entscheidbar sind.

(d) Es gilt genau dann $A \oplus B \leq C$, wenn $A \leq C$ und $B \leq C$ gilt.

Aufgabe 87 Zeigen Sie: ***mündlich, optional***

(a) Durch $A \equiv B :\Leftrightarrow A \leq B$ und $B \leq A$ wird eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Sprachen definiert. (Die durch A repräsentierte Äquivalenzklasse $[A]$ wird auch der *Grad* (engl. *degree*) von A genannt und mit $\deg(A)$ bezeichnet.)

(b) Durch $\deg(A) \leq \deg(B) :\Leftrightarrow A \leq B$ wird eine Ordnung auf der Menge der Grade definiert. (Zeigen Sie insbesondere, dass diese Ordnung wohldefiniert, also unabhängig von der Wahl der Repräsentanten ist.)

(c) Jede endliche nichtleere Menge von Graden besitzt ein Supremum.

Aufgabe 88 Zeigen Sie: ***mündlich***

(a) Die Sprache $\{w\#x\#y \mid w, x, y \in \{0,1\}^*$ und M_w ist eine DTM mit $M_w(x) = y\}$ ist RE-vollständig.

(b) Eine Sprache A ist genau dann RE-vollständig, wenn $\bar{A}$ $\mathsf{co\text{-}RE}$-vollständig ist.

(c) Die Klasse aller RE-vollständigen Sprachen und die Klasse aller $\mathsf{co\text{-}RE}$-vollständigen Sprachen sind disjunkt.

Aufgabe 89 Entscheiden Sie die folgenden PCP-Instanzen: ***mündlich***

(a) $\begin{pmatrix} a & ba & abb & bab \\ ab & ab & bb & abb \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} aaaa & aa \\ aaa & aaaaa \end{pmatrix}$

Geben Sie im positiven Fall eine PCP-Lösung an und beweisen Sie im negativen Fall, dass keine PCP-Lösung existiert.

Aufgabe 90 ***12 Punkte***

Welche der folgenden Sprachen sind entscheidbar? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

(a) $\{w \in \{0,1\}^* \mid$ es gibt ein $w' \in \{0,1\}^*$ mit $M_w(w') = 0\}$, *(mündlich)*

(b) $\{w \in \{0,1\}^* \mid$ es gibt ein $w' \in \{0,1\}^*$ mit $M_{w'}(w) = 0\}$, *(mündlich)*

(c) $\{w \in \{0,1\}^* \mid$ es gibt ein $w' \neq w$ mit $L(M_w) = L(M_{w'})\}$, *(3 Punkte)*

(d) $\{w \in \{0,1\}^* \mid L(M_w)$ ist rekursiv aufzählbar$\}$, *(3 Punkte)*

(e) $\{w \in \{0,1\}^* \mid \overline{L(M_w)}$ ist semi-entscheidbar$\}$, *(3 Punkte)*

(f) $\{w \in \{0,1\}^* \mid L(M_w)$ ist abzählbar$\}$. *(3 Punkte)*

Aufgabe 91 ***10 Punkte***

Betrachten Sie die Sprache $\mathrm{Eq} = \{v\#w \mid L(M_v) = L(M_w)\}$. Zeigen Sie:

(a) Das Halteproblem lässt sich auf Eq reduzieren. *(4 Punkte)*

(b) Das Halteproblem lässt sich auf $\overline{\mathrm{Eq}}$ reduzieren. *(4 Punkte)*

(c) Weder Eq noch $\overline{\mathrm{Eq}}$ sind semi-entscheidbar. *(2 Punkte)*

Aufgabe 92 ***8 Punkte***

Beweisen sie folgende Variante des Satzes von Rice: Sei $\mathcal{S}$ eine Sprachklasse, so dass semi-entscheidbare Sprachen $A, B \subseteq \{0,1,\#\}^*$ existieren mit $A \in \mathcal{S}$ und $B \notin \mathcal{S}$. Dann ist die Sprache

$$L_{\mathcal{S}} = \{w \in \{0,1\}^* \mid L(M_w) \in \mathcal{S}\}$$

unentscheidbar.