

Übungsblatt 7

Aufgabe 26

Zeigen Sie, dass jede Familie von Branching-Programmen P_n mit Weite $\mathcal{O}(1)$ und Größe $s(n)$ von einer Familie von Branching-Programmen P'_n mit Weite $\mathcal{O}(1)$ und Größe $s(n)^{\mathcal{O}(1)}$ simuliert werden kann, so dass alle Knoten in jeder Schicht von P'_n den gleichen Typ haben.

Aufgabe 27

Ein Schaltkreis $C = (V, E, \alpha, \beta, \omega)$ über einer Basis B hat Weite w , wenn sich V so in Schichten $V_i, i = 0, 1, \dots, k$, der Größe $\|V_i\| \leq w$ partitionieren lässt, dass sich alle Vorgänger u eines beliebigen Knotens $v \in V_i$ im Fall $\beta(u) \in B$ (d.h. u ist kein Eingabegatter) in V_{i-1} befinden. Zeigen Sie:

- Sei B eine Basis mit beschränktem Fanin. Dann lässt sich jeder Schaltkreis der Tiefe d und Weite w von einem Branching-Programm der Tiefe $\mathcal{O}(d)$ und Weite $\mathcal{O}(2^w)$ simulieren.
- Jedes Branching-Programm der Tiefe d und Weite w lässt sich von einem Schaltkreis der Tiefe $\mathcal{O}(d)$ und Weite $\mathcal{O}(\log w)$ simulieren.
- NC^1 enthält genau die Sprachen, die von einer Schaltkreisfamilie polynomieller Tiefe und konstanter Weite über der Basis \mathcal{B}_0 akzeptiert werden.

Aufgabe 28

Wie in der Vorlesung sei $\text{BP}(s, d, w)$ die Klasse aller Sprachen, die von einer Familie $\mathcal{P} = (P_n)$ von Branching-Programmen P_n der Größe $\mathcal{O}(s(n))$, der Tiefe $\mathcal{O}(d(n))$ und der Weite $\mathcal{O}(w(n))$ akzeptiert werden. Weiter sei $\text{Formula-Size}(s)$ die Klasse aller Sprachen, die von einer Familie $\mathcal{F} = (F_n)$ von Formeln (d.h. Schaltkreisen mit Fanout ≤ 1) F_n der Größe $\mathcal{O}(s(n))$ akzeptiert werden. Zeigen Sie:

- $\text{BP}(s, d, w) \subseteq \text{Size-Depth}(s, d)$,
- $\text{Formula-Size}(s) \subseteq \text{BP}(s, *, *)$ (ein Stern bedeutet, dass dieser Parameter unbeschränkt ist),
- $\text{UnbSize-Depth}(s, d) \subseteq \text{BP}(ds^{d-1}n, s^{d-1}n, d)$.

Aufgabe 29

Zeigen Sie, dass das Wortproblem für jede nicht auflösbare Gruppe \leq_{cd} -vollständig für NC^1 ist.