Probeklausur: Lösungsvorschläge

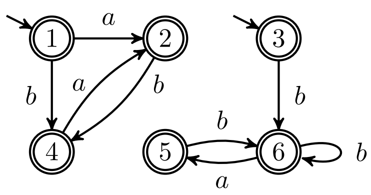
Hinweise zur Klausur:

- Die Klausur findet am Dienstag, 23. 02. 2010 um 9 Uhr in RUD26, 0'115 statt.
- Voraussetzung zur Teilnahme ist der Übungsschein.
- Die Bearbeitungszeit der Aufgaben wird 120 Minuten betragen.
- Hilfsmittel sind nicht zugelassen.
- Bitte bringen Sie zur Klausur Ihren Studenten- und einen Lichtbildausweis (Personalausweis, Reisepass oder Führerschein) mit.

Hinweis zur Probeklausur:

- Für die Probeklausur sollten Sie von einer Bearbeitungszeit von 180 Minuten ausgehen (d. h. 1 Punkt entspricht 1 Minute).

Aufgabe 1 Betrachten Sie den nebenstehenden NFA N. ***30 Punkte***

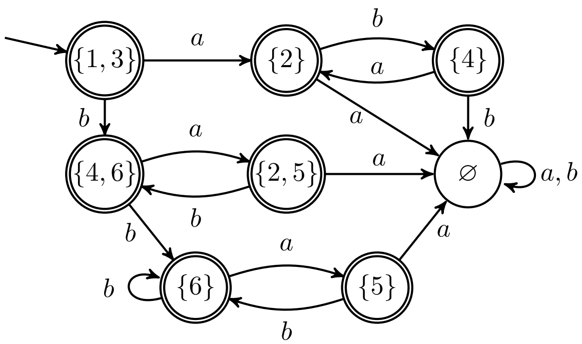


(a) Welche der Wörter ε, aa, abb und bbb gehören zu $L(N)$?

Lösung:
$\varepsilon, bbb \in L(N)$ und $aa, abb \notin L(N)$.

(b) Wandeln Sie N mit der Potenzmengenkonstruktion in einen DFA M um.

Lösung:



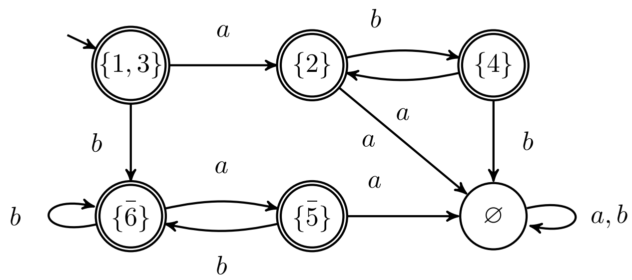
(c) Minimieren Sie M mit dem Verfahren aus der Vorlesung.

Lösung:

In der folgenden Tabelle sind für trennbare Zustände p, q jeweils Wörter aus $L_p \Delta L_q$ angegeben. Die Länge entspricht der Runde des Algorithmus, in der die Inäquivalenz festgestellt wird.

	{4,6}	{2,5}	{1,3}	{6}	{5}	{4}	{2}
$\{2,5\}$	a						
$\{1,3\}$	abb	a					
$\{6\}$		a	abb				
$\{5\}$	a		a	a			
$\{4\}$	b	b	b	b	b		
$\{2\}$	a	bb	a	a	bb	a	
$\varnothing$	ε	ε	ε	ε	ε	ε	ε

Wir verschmelzen die Zustände $\{4,6\}$ und $\{6\}$ zu $\{\bar{6}\}$ und $\{2,5\}$ und $\{5\}$ zu $\{\bar{5}\}$:



(d) Geben Sie einen möglichst kurzen regulären Ausdruck für $L(N)$ an.

Lösung:

$$
\begin{aligned}
L(N) &= L(\varepsilon \mid a(ba)^*(b \mid \varepsilon) \mid b(b \mid ab)^*(a \mid \varepsilon)) \\
&= L\left(\left((ab)^* \mid b(b \mid ab)^*\right)(a \mid \varepsilon)\right)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2 ***25 Punkte***

Gegeben ist die Grammatik $G = (\{S\}, \{1, +, \cdot, (,)\}, P, S)$ mit den Produktionen

$$P: \quad S \to (S + S), \quad S \to S \cdot S, \quad S \to 1.$$

(a) Geben Sie einen PDA für die Sprache $L = L(G)$ an.

Lösung:
PDA $M = (\{q\}, \{1, +, \cdot, (,)\}, \{1, +, \cdot, (,), S\}, \delta, q, S)$, wobei δ definiert ist mit:

$$q\epsilon S \to q(S+S) \qquad q\epsilon S \to qS \cdot S \qquad q\epsilon S \to q1$$
$$q((\to q\epsilon \qquad q)) \to q\epsilon \qquad q\cdot\cdot \to q\epsilon$$
$$q++ \to q\epsilon \qquad q11 \to q\epsilon$$

(b) Zeigen Sie mit dem Pumpinglemma, dass L nicht regulär ist.

Lösung:
Betrachten wir unter der Annahme, dass eine Pumpingzahl l existiert, das Wort

$$\underbrace{(\cdots(}_{l\text{-mal}}1\underbrace{+1)\cdots+1)}_{l\text{-mal}},$$

dann lassen sich aufgrund der Bedingungen $|uv| \leq l$ und $v \neq \epsilon$ nur Zerlegungen finden, in denen $v = (^k$ mit $1 \leq k \leq l$ ist. Somit gilt für kein $i \neq 1$, dass $uv^iw \in L$ ist, da bei jedem Wort der Sprache L (neben weiteren Bedingungen) die Anzahl der öffnenden und schließenden Klammern gleich ist. Also ist L nicht pumpbar.

(c) Überführen Sie G in Chomsky-Normalform und prüfen Sie mit dem CYK-Algorithmus, ob das Wort $(1+1)\cdot 1$ zu L gehört.

Lösung:
$G' = (\{S, S_1, S_2, S_3, S_4, X_(, X_), X_+, X_{[\cdot]}\}, \{1, +, \cdot, (,)\}, P', S)$ ist eine zu G äquivalente Grammatik in Chomsky-Normalform mit den Regeln P':

$$X_(\to (\qquad X_) \to) \qquad X_{[\cdot]} \to \cdot \qquad X_+ \to +$$
$$S \to X_(S_1 \qquad S_1 \to SS_2 \qquad S_2 \to X_+S_3 \qquad S_3 \to SX_)$$
$$S \to SS_4 \qquad S_4 \to X_{[\cdot]}S \qquad S \to 1$$

(	1	+	1	)	$\cdot$	1
$\{X_(\}$	$\{S\}$	$\{X_+\}$	$\{S\}$	$\{X_)\}$	$\{X_{[\cdot]}\}$	$\{S\}$
$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{S_3\}$	$\varnothing$	$\{S_4\}$	
$\varnothing$	$\varnothing$	$\{S_2\}$	$\varnothing$	$\varnothing$		
$\varnothing$	$\{S_1\}$	$\varnothing$	$\varnothing$			
$\{S\}$	$\varnothing$	$\varnothing$				
$\varnothing$	$\varnothing$					
$\{S\}$						

Da die Menge in der untersten Zeile das Startsymbol S von G' enthält, folgt $[(1+1)\cdot 1] \in L$.

Aufgabe 3 ***15 Punkte***
Geben Sie eine kontextsensitive Grammatik für $L = \{x\#x^R\#x \mid x \in \{a,b\}^*\}$ an.

Lösung:
$G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, T_1, T_2, A, B\}$, $\Sigma = \{a, b\#\}$ und P gegeben durch:

$$S \to T_1T_2 \qquad Aa \to aA \qquad Ba \to aB$$
$$T_1 \to aAT_1a \qquad Ab \to bA \qquad Bb \to bB$$
$$T_1 \to bBT_1b \qquad A\# \to \#A \qquad B\# \to \#B$$
$$T_1 \to \# \qquad AT_2 \to T_2a \qquad BT_2 \to T_2b$$
$$T_2 \to \#$$

Aufgabe 4 ***35 Punkte***
Sind folgende Aussagen wahr oder falsch? Begründen Sie.

(a) Wenn A kontextfrei ist, dann ist A^* regulär.

Lösung:
Nein. Sei $A = \{a^nb^n | n \geq 1\} \in \mathsf{CFL} \setminus \mathsf{REG}$.
Angenommen, A^* ist regulär, dann ist mit $B = \{a^nb^m | n, m \geq 1\}$ auch

$$A^* \cap B = A$$

regulär. Aber A ist bekanntermaßen nicht regulär. Widerspruch.

(b) Wenn A regulär ist, dann ist $A^* - A$ kontextfrei.

Lösung:
Ja. Da A regulär ist, ist auch A^* regulär und damit ist $A^* \setminus A = A^* \cap \overline{A}$ sogar regulär. Reguläre Sprachen sind unter Durchschnitt und Komplement abgeschlossen.

(c) Aus $A \leq B$ und $B \in \mathsf{CSL}$ folgt $A \in \mathsf{CSL}$.

Lösung:
Nein. Sei $A \in \mathsf{REC} \setminus \mathsf{CSL}$, d.h. $A \notin \mathsf{CSL}$ und sei $B = \{1\} \in \mathsf{CSL}$. Dann gilt

$$A \leq B \quad \text{mittels} \quad x \mapsto \chi_A(x).$$

(d) Aus $A \leq^p \text{SAT}$ und $A \in \mathsf{NP}$ folgt A ist NP-vollständig.

Lösung:
Nein. Sei $A = \varnothing$. Dann ist $A \leq^p \text{SAT}$ mittels $w \mapsto x \wedge \overline{x}$. Aber $A \notin \mathsf{NPC}$ da $\text{SAT} \not\leq^p A$ ($x \vee \overline{x} \in \text{SAT}$ kann nicht auf ein Wort in A abgebildet werden).

(e) Aus $A \leq^p \text{SAT}$ und $\text{SAT} \leq^p A$ folgt A ist NP-vollständig.

Lösung:
Ja. Aus $A \leq^p \text{SAT}$ folgt $A \in \mathsf{NP}$ (da $\text{SAT} \in \mathsf{NP}$).
Da SAT NP-hart, und $\text{SAT} \leq^p A$ folgt A ist NP-hart. Also ist A NP-vollständig.

(f) Wenn A^* regulär ist, dann kann $A \cap \{1\}^*$ unentscheidbar sein.

Lösung:

Ja. Sei H' das unär kodierte Halteproblem für DTMs. Dabei wird im ersten Schritt 0 zu 00, 1 zu 11, und das Trennzeichen zu 01. Anschließend wird die resultierende Bitfolge x als natürliche Zahl n_x mit Binärdarstellung $1x$ interpretiert und durch 1^{n_x} unär kodiert.
Sei $A = H' \cup \{1\}$. Dann ist $A \cap \{1\}^* = A$ wegen $H \le H' \le A$ unentscheidbar, aber $A^* = \{1\}^*$ ist regulär.

(g) A^* ist für jede Sprache $A \subseteq \{0,1\}^*$ semi-entscheidbar.

Lösung:

Nein. Sei $A = \{1^n 0 \mid 1^n \notin H'\} \subseteq \{0,1\}^*$ (wobei H' wieder das unär kodierte Halteproblem ist). Wegen $\overline{H} \le A$ ist dann A nicht semi-entscheidbar. Wäre nun aber A^* semi-entscheidbar, so auch $A^* \cap \{1\}^* 0 = A$, da $\{1\}^*0$ semi-entscheidbar (sogar regulär) ist und RE unter Schnitt abgeschlossen ist. Widerspruch.

Aufgabe 5 ***30 Punkte***

Bestimmen Sie, welche der folgenden Sprachen entscheidbar, semi-entscheidbar, oder nicht semi-entscheidbar sind. Begründen Sie.

(a) $L_1 = \big\{w \in \{0,1\}^* \bigm| \exists x \in \{0,1\}^* : M_w(x) = x\big\}$,

Lösung:

Die Sprache ist nach dem Satz von Rice nicht entscheidbar, da $L_1 = L_{\mathcal{F}}$ für die Eigenschaft $\mathcal{F} = \{f \in \mathsf{FREC}_p \mid \exists x \in \{0,1\}^* : f(x) = x\}$ ist und $\mathcal{F}$ nicht trivial ist: Einerseits ist $w_0 \notin L_1$, wobei w_0 die Kodierung einer DTM ist, die die Funktion $x \mapsto 1x$ berechnet. Andererseits ist $w_1 \in L_1$, wobei w_1 die Kodierung einer DTM ist, die die Identität berechnet.

Die Sprache ist semi-entscheidbar, da sie von der NTM N akzeptiert wird, die bei Eingabe w zunächst ein $x \in \{0,1\}^*$ rät, dann $M_w(x)$ simuliert und genau dann akzeptiert, falls diese x ausgibt.

(b) $L_2 = \big\{w \in \{0,1\}^* \bigm| \exists x \in \{0,1\}^* : M_w(x) \neq x\big\}$,

Lösung:

Ebenfalls nicht entscheidbar nach Satz von Rice – $w_0 \in L_2$ und $w_1 \notin L_2$ mit w_0, w_1 wie in (a).

Die Sprache ist $\mathsf{co\text{-}RE}$-hart (und damit weder entscheidbar noch semi-entscheidbar), da sich das Komplement $\overline{K}$ des speziellen Halteproblems darauf reduzieren lässt. Verwende die Reduktionsfunktion $f(w) = w'$, wobei $M_{w'}(x)$ unabhängig von der Eingabe $M_w(w)$ simuliert. Wenn die Simulation hält, wird die Eingabe x ausgegeben. Damit gilt $w \in \overline{K} \Leftrightarrow w' \in L_2$.

Bemerkung: $\overline{L_2}$ ist ebenfalls nicht semi-entscheidbar, woraus $L_2 \notin \mathsf{co\text{-}RE}$ folgt.

(c) $L_3 = \big\{w \in \{0,1\}^* \bigm| M_w(w) \text{ besucht kein Bandfeld mehrmals}\big\}$.

Lösung:

Die Sprache ist entscheidbar, da sich $M_w(w)$ nach höchstens $\|w\| + \|Z\|$ Schritten in einer Endlosschleife von Links- bzw. Rechtsbewegungen befindet, falls sie kein Bandfeld mehrfach besucht.

Achtung: Der Satz von Rice ist hier nicht anwendbar, da die Zugehörigkeit von w zu L_3 nicht nur von der von M_w berechneten Funktion, sondern auch von der Maschine selbst (genauer: von der Folge ihrer Kopfbewegungen) abhängt.

(d) $L_4 = \big\{w \in \{0,1\}^* \bigm| M_w(w) \neq w\big\}$,

Lösung:

Die Sprache ist nicht semi-entscheidbar (und damit auch nicht entscheidbar), da sich $\overline{K}$ genau wie in Teilaufgabe (b) darauf reduzieren lässt.

Achtung: Der Satz von Rice ist hier nicht anwendbar, da die Zugehörigkeit von w zu L_4 nicht nur von der von M_w berechneten Funktion, sondern auch von der Maschine selbst (genauer: von ihrer Kodierung w) abhängt.

(e) $L_5 = \big\{w \in \{0,1\}^* \bigm| \forall x \in \{0,1\}^* : M_w(w) = x\big\}$,

Lösung:

Es gilt $L_5 = \varnothing$, da die Ausgabe einer DTM bei fester Eingabe eindeutig bestimmt ist. Damit ist L_5 entscheidbar (und damit auch semi-entscheidbar).

(f) $L_6 = \big\{w \in \{0,1\}^* \bigm| \exists v \in \{0,1\}^* : L(M_v) \subsetneq L(M_w)\big\}$.

Lösung:

L_6 enthält genau die Kodierungen von den Turingmaschinen, die eine nichtleere Sprache akzeptieren. Diese (semantische) Eigenschaft ist nichttrivial, sodass L_6 nach dem Satz von Rice nicht entscheidbar ist.

Andererseits ist L_6 semi-entscheidbar, da sie von der NTM N akzeptiert wird, die bei Eingabe w ein $x \in \{0,1\}^*$ rät, $M_w(x)$ simuliert und akzeptiert, wenn $M_w(x)$ eine akzeptierende Konfiguration erreicht.

Aufgabe 6 Zeigen Sie: ***20 Punkte***

(a) $\textsc{HamPath} \le^p \textsc{HamCycle}$,

Lösung:

Verwende die Reduktionsfunktion $\langle G, s, t\rangle \mapsto G'$, die einen Graphen $G = (V, E)$ zusammen mit Startknoten s und Zielknoten t auf den Graphen $G' = (V', E')$ mit $V' = V \cup \{v_0\}$ und $E' = E \cup \{\{s, v_0\}, \{v_0, t\}\}$ abbildet.

Es ist offensichtlich, dass sich diese Funktion in Polynomialzeit berechnen lässt. Nun zur Korrektheit der Reduktionsfunktion:

- $\langle G, s, t\rangle \in \textsc{HamPath} \Rightarrow G' \in \textsc{HamCycle}$:
  Aus einem Hamiltonpfad von s nach t in G kann ein Hamiltonkreis in G' konstruiert werden, indem die Enden über den neuen Knoten v_0 verbunden werden.
- $\langle G, s, t\rangle \in \textsc{HamPath} \Leftarrow G' \in \textsc{HamCycle}$:

Betrachte einen beliebigen Hamiltonkreis in G'. Dieser muss durch den Knoten v_0 gehen. Da s und t die einzigen Nachbarn von v_0 sind, müssen diese Knoten vor und nach v_0 auf dem Kreis liegen. Der Rest des Kreises bildet damit einen Hamiltonpfad von s nach t in G.

(b) DiHamPath $\leq^p$ HamPath.

Lösung:

Gehe ähnlich wie bei der Reduktion DiHamCycle $\leq^p$ HamCycle im Skript vor und ersetze jeden Knoten v im ursprünglichen Graphen G durch drei Knoten $\{v, v', v''\}$ im neu konstruierten Graphen G', die einen Pfad (v', v, v'') bilden. Eingehende Kanten in v werden auf v' umgeleitet, ausgehende auf v''. Abweichend von der Konstruktion für Hamiltonkreise müssen außerdem die in s eingehenden und aus t ausgehenden Kanten gelöscht werden. Verwende s' als Startknoten und t'' als Zielknoten.

Es ist wieder offensichtlich, dass die Reduktionsfunktion in Polynomialzeit berechnet werden kann.

Nun zur Korrektheit:

- $\langle G, s, t\rangle \in$ DiHamPath $\Rightarrow \langle G', s', t''\rangle \in$ HamPath:
  Ersetze im gerichteten Hamiltonpfad von s nach t in G jeden Knoten v durch die Folge v', v, v''. Das Ergebnis ist ein Pfad von s' nach t'' in G', der alle Knoten besucht.
- $\langle G, s, t\rangle \in$ DiHamPath $\Leftarrow \langle G', s', t''\rangle \in$ HamPath:
  Betrachte einen beliebigen Hamiltonpfad von s' nach t'' in G'. Vor und nach einem Knoten v müssen die beiden Knoten v' und v'' kommen, da dies die einzigen Nachbarn von v sind. Außerdem muss nach einem Knoten v'' ein Knoten u' kommen, da alle zu v'' inzidenten Kanten außer $\{v, v''\}$ in G einer aus v ausgehenden Kante entsprechen. Damit hat der Pfad die Form $(s', s, s'', v_1', v_1, v_1'', \ldots, t', t, t'')$. Nach Ersetzen eines Tripels v_i', v_i, v_i'' durch v ergibt sich ein gerichteter Pfad von s nach t in G.

Hinweis: Schlagen Sie die Definition der Probleme im Skript nach.

Aufgabe 7 — *25 Punkte*

Bestimmen Sie für untenstehenden Graphen G die folgenden Parameter. Begründen Sie Ihre Antwort.

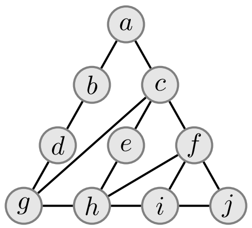
(a) $\mu(G) = \max\{\|M\| \mid M \text{ ist ein Matching in } G\}$,

(b) $\omega(G) = \max\{\|C\| \mid C \text{ ist eine Clique in } G\}$,

(c) $\chi(G) = \min\{k \geq 1 \mid G \text{ ist } k\text{-färbbar}\}$,

(d) $\alpha(G) = \max\{\|S\| \mid S \text{ ist stabil in } G\}$,

(e) $\beta(G) = \min\{\|K\| \mid K \text{ ist eine Kantenüberdeckung in } G\}$.



Lösung:

(a) $\mu(G) = 5$: $M = \{\{a, b\}, \{d, g\}, \{h, i\}, \{f, j\}, \{c, e\}\}$ ist ein Matching der Größe 5. Ein größeres Matching kann es nicht geben, da M bereits perfekt ist.

(b) $\omega(G) = 3$: G enthält genau zwei 3-Cliquen: $\{f, h, i\}$ und $\{f, i, j\}$. Dies zeigt bereits $\omega(G) \geq 3$. G enthält keine 4-Clique, da G dann mindestens vier 3-Cliquen enthalten müsste.

(c) $\chi(G) = 3$: Da G Dreiecke enthält, muss $\chi(G) \geq 3$ sein. Eine 3-Färbung c ist

u	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
$c(u)$	1	2	2	1	3	3	3	1	2	1

(d) $\alpha(G) = 4$: Die Menge $S = \{b, c, h, j\}$ ist stabil. Auf dem Kreis $K_1 = (a, b, d, g, h, e, c, a)$ der Länge 7 können maximal 3 Knoten und auf dem Kreis $K_2 = (f, i, j)$ der Länge 3 kann maximal 1 Knoten einer beliebigen stabilen Menge S liegen. Da die beiden Kreise alle Knoten von G überdecken, kann S maximal $3 + 1 = 4$ Knoten enthalten.

(e) $\beta(G) = 6$: Klar, da $\beta(G) = n(G) - \alpha(G)$.

Geben Sie zudem an, ob G eine Eulerlinie, eine Eulertour, einen Hamiltonpfad oder einen Hamiltonkreis besitzt. Begründen Sie.

Lösung:

- Eulerlinie: $(g, c, a, b, d, g, h, i, j, f, c, e, h, i, f, h, i)$.
- G enthält keine Eulertour, da nicht alle Knoten geraden Grad haben.
- Hamiltonpfad: $(a, b, d, g, c, e, h, f, i, j)$.
- G enthält keinen Hamiltonkreis, da dieser die Sequenz $S = (c, e, h)$ enthalten müsste (anders ist e nicht erreichbar). Besuchen wir nun nach h den Knoten g, so sind die Knoten f, i, j nicht mehr erreichbar. Falls wir dagegen nach h den Knoten f oder i besuchen, so sind die Knoten a, b, d, g nicht mehr erreichbar.