Übungsblatt 1

Abgabe bis zum 3. Mai 2011

Für einen Übungsschein sind folgende Kriterien zu erfüllen:

- Lösen der schriftlichen Aufgaben im Umfang von mindestens 50% der erreichbaren Punkte und
- Vorrechnen von mindestens zwei mündlichen Aufgaben.

Die schriftlichen Aufgaben können in Gruppen von bis zu zwei Personen bearbeitet werden. Diese Gruppen sollen über das Semester gleich bleiben.

Aufgabe 1 ***mündlich***

Seien $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ Funktionen. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

(a) $\sum_{i=1}^{n} i = \mathcal{O}(n^2)$
(b) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \Theta(n^3)$
(c) $\sum_{i=1}^{n} i^2 + \log n^9 = \Theta(n^3)$
(d) $\log^3 n = \omega(\log n^3)$
(e) $\log n^5 = \omega(\log n)$
(f) $f(n) + \mathcal{O}(g(n)) = \mathcal{O}(f(n) + g(n))$
(g) $\mathcal{O}(f(n) + g(n)) = \mathcal{O}(f(n)g(n))$
(h) $\mathcal{O}(f(n) + g(n)) = f(n) + \mathcal{O}(g(n))$
(i) $f(n) + g(n) = \Omega(\min\{f(n), g(n)\})$
(j) $f(n) + g(n) = \Theta(\max\{f(n), g(n)\})$
(k) $2^{n+\mathcal{O}(1)} = \mathcal{O}(2^n)$
(l) $2^{\mathcal{O}(n)} = \mathcal{O}(2^n)$
(m) $f(n) + g(n) = \mathcal{O}(\max\{f(n), g(n)\})$
(n) $\mathcal{O}(2^n) = o(3^n)$
(o) $n! = \Omega(n^n)$
(p) $n! = 2^{\Theta(n \log n)}$
(q) $\sqrt{n} = \omega(\log n)$
(r) Wenn $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$, dann gilt $f^2(n) = \mathcal{O}(g^2(n))$

Aufgabe 2 ***10 Punkte***

Seien $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ Funktionen. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

(a) Wenn $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$, dann gilt $f(n^2) = \mathcal{O}(g(n^2))$ *(3 Punkte)*
(b) $2^{\mathcal{O}(n)} = \mathcal{O}(2^n)$ *(3 Punkte)*
(c) Wenn $f(n) = \Theta(g(n))$, dann gilt $\log f(n) = \Theta(\log g(n))$ *(4 Punkte)*

Aufgabe 3 ***mündlich***

Geben Sie Ablaufprotokolle der beiden Algorithmen `DFA-String-Matcher` und `KMP-String-Matcher` bei Eingabe des Musters AUGAUGUGA und des Textes ACGAUGAUGUGAGCGAUGAUGAUGUGA an.

Aufgabe 4 ***mündlich***

Ein String x ist eine *zyklische Verschiebung* von y, falls $x \in \{uv \mid y = vu\}$ ist. Geben Sie einen Linearzeit-Algorithmus an, der für zwei Texte x und y entscheidet, ob x eine zyklische Verschiebung von y ist. Begründen Sie.

Aufgabe 5 ***10 Punkte***

Sei π die Präfixfunktion für ein beliebiges Muster $y = y_1 \cdots y_m \in \Sigma^*$ und sei δ die Überführungsfunktion von M_y. Betrachten Sie folgende auf der Menge $\{1, \ldots, m\}$ definierte Funktion

$$\pi'(k) = \max \left\{ 0 \le j < m \;\middle|\; \begin{array}{l} y_1 \cdots y_j \text{ ist echtes Suffix von } y_1 \cdots y_k \\ \text{und im Fall } k < m \text{ ist } y_{j+1} \neq y_{k+1} \end{array} \right\} .$$

(a) Berechnen Sie π und π' für das Muster $y = (ab)^{10}$. *(mündlich)*

(b) Zeigen Sie, dass $\pi'(k) \le \pi(k)$ für alle $k = 1, \ldots, m$ gilt. *(2 Punkte)*

(c) Zeigen Sie, dass der KMP-Algorithmus bei einem Mismatch im Zustand k mindestens bis zum Zustand $\pi'(k)$ zurückspringt, bevor er das nächste Zeichen liest. *(2 Punkte)*

(d) Zeigen Sie, dass der KMP-Algorithmus auch bei Verwendung von π' anstelle von π korrekt arbeitet. *(2 Punkte)*

(e) Zeigen Sie, dass π' (wie π) in Zeit $O(m)$ berechenbar ist. *(2 Punkte)*

(f) Zeigen Sie, dass δ bei Kenntnis von π' (oder π) in Zeit $O(\|\Sigma\| m)$ berechenbar ist. *(2 Punkte)*