Übungsblatt 3

Abgabe bis zum 1. Juni 2010

Aufgabe 13 ***5 Punkte***

Lösen Sie die folgenden Rekursionsgleichungen, indem Sie möglichst enge untere und obere asymptotische Schranken für die Lösungsfunktionen angeben (evtl. in Abhängigkeit vom Anfangswert $T(1) = a$).

(a) $T(n) = 3T(n/2) + 4T(n/16) + 5n^k$, $k \in \{1, 2, 3\}$, *(mündlich)*

(b) $T(n) = bT(n - c)$, $b \geq 0$, $c \geq 1$, *(mündlich)*

(c) $T(n) = bT(cn) + dn + e$, $b, d \geq 0$, $0 < c < 1$. *(5 Punkte)*

Aufgabe 14 ***mündlich***

(a) Geben Sie den Rekursionsbaum von `QuickSort` für die Eingabefolge $(3, 1, 5, 2, 4)$ an.

(b) Wie viele Vergleiche benötigt `QuickSort`, um die Eingabefolge $(3, 1, 5, 2, 4)$ zu sortieren?

(c) Geben Sie den Fragebaum B von `QuickSort` für die Sortierung einer Folge von 4 Zahlen an. Wieviele Blätter und Knoten hat B? Was ist die maximale und minimale Blatttiefe von B?

(d) Bestimmen Sie für $n = 1, \ldots, 10$ die Fragekomplexität von `QuickSort` im besten, schlechtesten und durchschnittlichen Fall für eine Permutation der Zahlen $1, \ldots, n$. Vergleichen Sie diese Werte jeweils mit der unteren Schranke $\lceil \log_2(n!) \rceil$ für den schlechtesten Fall.

(e) Bestimmen Sie für alle Paare $1 \leq i < j \leq 5$ das erste von `QuickSort` beim Sortieren der Eingabefolge $(3, 1, 5, 2, 4)$ im Intervall $I_{ij} = \{i, \ldots, j\}$ gewählte Pivotelement.

Aufgabe 15 ***mündlich, optional***

Zeigen Sie, dass `QuickSort` im Durchschnitt $V(n) = (2\ln 2)\log_2(n!) - \Theta(n)$ Vergleiche benötigt, um eine Folge von n paarweise verschiedenen Zahlen zu sortieren.

Hinweis: Für die *harmonische Reihe* $H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$ gilt $\ln(n+1) \leq H_n \leq \ln n + 1$ und $H_n - \ln n - \gamma \sim 1/(2n)$, wobei $\gamma \approx 0,57721$ die Eulersche Konstante ist.

Aufgabe 16 ***mündlich***

Der Algorithmus `RandomQuickSort` ist eine randomisierte Variante von `QuickSort`, bei der nicht das letzte Element des zu sortierenden Arrays sondern ein zufälliges Element als Pivot-Element gewählt wird.

(a) Bestimmen Sie die (erwartete) Anzahl von Vergleichen, die `RandomQuickSort` im besten, mittleren und schlechtesten Fall vornimmt, um eine Folge von n paarweise verschiedenen Zahlen zu sortieren.

Hinweis: Zeigen Sie, dass sich `RandomQuickSort` bei jeder Eingabefolge verhält wie `QuickSort` bei einer zufälligen Permutation dieser Folge.

(b) Welche Erwartungswerte ergeben sich für $n = 1, 2, 3, 4$ im schlechtesten und im besten Fall, wenn die Folgenglieder mehrfach vorkommen können?

Aufgabe 17 ***mündlich***

Die *Tiefe* $t(v)$ eines Knotens in einem Baum mit Wurzel w sei die Länge des Pfades von w zu v. Sei B ein Binärbaum mit n Blättern. Zeigen Sie:

(a) Die maximale Blatttiefe von B beträgt mindestens $\lceil \log_2 n \rceil$.

*(b) Die mittlere Blatttiefe von B beträgt mindestens $\log_2 n$. *(optional)*

(c) Ein vergleichendes Sortierverfahren benötig im Durchschnitt mindestens $\log_2(n!)$ Vergleiche, um eine zufällige Permutation der Zahlen $1, \ldots, n$ zu sortieren.

(d) Auch randomisierte vergleichende Sortierverfahren benötigen hierzu im schlechtesten Fall mindestens $\lceil \log_2(n!) \rceil$ und im Durchschnitt mindestens $\log_2(n!)$ Vergleiche.

Aufgabe 18 ***5 Punkte***

(a) Wie viele Vergleiche benötigt `HeapSort`, um die Eingabefolge $(4, 2, 5, 1, 3)$ zu sortieren? *(2 Punkte)*

(b) Geben Sie den Fragebaum von `HeapSort` für die Sortierung von 4 Zahlen an. *(3 Punkte)*