

Übungsblatt 2

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 9:10 Uhr am 3. November 2009.

Aufgabe 8

5 Punkte

Seien A, B, C Sprachen. Zeigen oder widerlegen Sie:

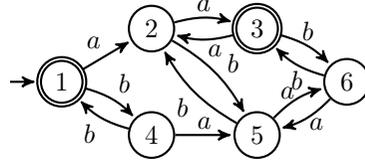
- (a) $A(B \cup C) = AB \cup AC$, (b) $A(B \cap C) \subseteq AB \cap AC$, (mündlich)
 (c) $A^+ = AA^*$, (d) $A(B \cap C) = AB \cap AC$. (2+3 Punkte)

Aufgabe 9

5 Punkte

Gegeben sei nebenstehender DFA. Geben Sie möglichst einfache reguläre Ausdrücke für die folgenden Sprachen an.

- (a) $L_{1,2}^0, L_{2,1}^6, L_{2,5}^4$, (mündlich)
 (b) $L_{2,3}^5$ und $L_{1,3}^5$. (5 Punkte)



Aufgabe 10

mündlich, optional

Wenn wir bei einem DFA $M = (Z, \Sigma, \delta, q_0, E)$ eine Überföhrungsfunktion der Form $\delta : Z \times \Sigma \rightarrow Z \times \Sigma$ zulassen, dann können wir die zweite Komponente b des Werts $\delta(q, a) = (p, b)$ als Ausgabe von M bei diesem Rechenschritt interpretieren. M überföhrt also Eingaben x der Länge n in Ausgaben y der Länge n .

Geben Sie einen solchen DFA M mit dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ an, der eine Ganzzahldivision durch 3 auf Binärzahlen ausföhrt. Zum Beispiel muss M die Eingabe 10001 (= 17) in die Ausgabe 00101 (= 5) überföhren.

Aufgabe 11

5 Punkte

Betrachten Sie die Sprachen

$$A = \{u \in \{a, b\}^* \mid u \text{ endet mit } b\} \text{ und } B = \{v \in \{a, b\}^* \mid \#_a(v) \text{ ist ungerade}\}.$$

- (a) Geben Sie für die Sprachen A und B DFAs M und M' mit jeweils 2 Zuständen an. (mündlich)
 (b) Konstruieren Sie aus M und M' mit dem Verfahren aus der Vorlesung einen NFA N für das Produkt $L = AB$. (mündlich)
 (c) Konstruieren Sie aus N einen NFA N' für die Sternhülle L^* von L mit dem Verfahren aus der Vorlesung. (5 Punkte)

Aufgabe 12

mündlich

Ein ENFA (extended NFA) ist ein NFA $N = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$, wobei δ die Form

$$\delta : Z \times \Sigma^* \rightarrow \mathcal{P}(Z)$$

hat und $\{(z, w) \mid \delta(z, w) \neq \emptyset\}$ endlich ist. Der Zustandsgraph von N hat also nur endlich viele Kanten, die mit Wörtern $w \in \Sigma^*$ beschriftet sind. Ist eine Kante mit ε beschriftet, so spricht man von einem »spontanen« Übergang, da N den Zustand wechselt, ohne ein Eingabezeichen zu lesen.

- (a) Definieren Sie die von einem ENFA N erkannte Sprache formal.
 (b) Zeigen Sie, dass $\{L(N) \mid N \text{ ist ein ENFA}\} = \text{REG}$ ist.
 (c) Zeigen Sie, dass ohne die Einschränkung » $\{(z, w) \mid \delta(z, w) \neq \emptyset\}$ ist endlich« jede Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ von einem ENFA erkannt wird.

Aufgabe 13

mündlich

Sei $L_1 \subseteq \{a, b\}^*$ die Sprache der Wörter, die aba als Teilwort enthalten.

- (a) Geben Sie einen NFA N für L_1 an und zeigen Sie, dass $L(N) = L_1$ ist.
 (b) Konstruieren Sie den zu N gehörigen Potenzmengenautomaten.
 (c) Geben Sie reguläre Ausdrücke für L_1 und für $\overline{L_1}$ an.

Aufgabe 14

10 Punkte

Sei $L_2 \subseteq \{a, b\}^*$ die Sprache der Wörter, die das Teilwort $abab$ enthalten.

- (a) Geben Sie einen NFA N für L_2 an und zeigen Sie $L(N) = L_2$. (3 Punkte)
 (b) Konstruieren Sie den zu N gehörigen Potenzmengenautomaten. (3 Punkte)
 (c) Geben Sie reguläre Ausdrücke für L_2 und für $\overline{L_2}$ an. (4 Punkte)

Aufgabe 15

5+5 Punkte

Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine reguläre Sprache. Zeigen Sie, dass dann auch die folgenden Sprachen regulär sind, indem Sie aus einem DFA für L einen DFA (oder NFA) für diese Sprachen konstruieren. Begründen Sie jeweils auch die Korrektheit des von Ihnen konstruierten Automaten.

- (a) $\text{prefix}(L) = \{x \in \Sigma^* \mid \exists y \in \Sigma^* : xy \in L\}$, (mündlich)
 (b) $L^R = \{x^R \mid x \in L\}$, (mündlich)
 (x^R bezeichnet das gespiegelte Wort, z.B. $abcd^R = dcba$)
 (c) $\text{cycle}(L) = \{vu \in \Sigma^* \mid uv \in L\}$, (mündlich, optional)
 (d) $\text{suffix}(L) = \{x \in \Sigma^* \mid \exists y \in \Sigma^* : yx \in L\}$, (2 Punkte)
 (e) L^+ , (3 Punkte)
 (f) $L/2 = \{x \in \Sigma^ \mid \exists y \in \Sigma^* : xy \in L, |x| = |y|\}$. (5 Zusatzpunkte)

Hinweis: Mit * markierte Aufgaben haben einen erhöhten Schwierigkeitsgrad. Für ihre Lösung werden Zusatzpunkte vergeben.