Übungen zur Komplexitätstheorie Wintersemester 06/07

Johannes Köbler

Übungsblatt 4

Aufgabe 12 Sei M eine TM, die für mindestens eine Eingabelänge n nach $\leq n+1$ Schritten hält. Was lässt sich daraus für die Komplexität von $L(M)$ schließen.

Aufgabe 13 Zeigen Sie, dass DSPACE($\log\log n$) nichtreguläre Sprachen enthält.
Hinweis: Betrachten Sie die Sprache $L = \{bin(1)\#\cdots\#bin(n) \mid n \geq 1\}$, wobei $bin(i)$ die Binärdarstellung der Zahl i ist.
Bemerkung: Es lässt sich zeigen, dass DSPACE($o(\log\log n)$) = REG ist.

Aufgabe 14 Zeigen Sie, dass aus E $\neq$ NE folgt, dass P $\neq$ NP ist (*downward separation*). *Hinweis:* Betrachten Sie die "tally Version" einer Sprache $A \subseteq \{0,1\}^*$,

$$tally(A) = \{0^{num(1x)} \mid x \in A\},$$

wobei $num(1x)$ die durch die Binärzahl $1x$ repräsentierte natürliche Zahl ist, und zeigen Sie die Äquivalenzen

$$A \in \mathrm{E} \iff tally(A) \in \mathrm{P} \text{ bzw. } A \in \mathrm{NE} \iff tally(A) \in \mathrm{NP}.$$

Aufgabe 15 (Blum Komplexität; schriftlich, 10 Punkte)

Eine partielle Funktion Φ, die (geeignete Kodierungen von) TMs M und Eingaben x in die natürlichen Zahlen abbildet, heißt **Komplexitätsmaß**, falls sie die beiden Axiome

> **Axiom 1:** $\Phi(M, x)$ ist genau dann definiert, wenn $M(x)$ definiert ist.
> **Axiom 2:** Die Frage, ob $\Phi(M, x) = m$ gilt, ist entscheidbar.

erfüllt. Welche der folgenden Funktionen sind Komplexitätsmaße?

a) $time_M(x)$ und $\mathsf{space}_M(x)$ für DTMs und NTMs.

b) $ink_M(x)$: Anzahl der Ersetzungen eines Symbols durch ein anderes Symbol.

c) $carbon_M(x)$: Anzahl der Ersetzungen eines Symbols durch das *gleiche* Symbol.

Aufgabe 16 Seien Φ und Φ' zwei Komplexitätsmaße. Zeigen Sie, dass es dann eine rekursive Funktion r gibt, so dass für alle Turingmaschinen M und für fast alle x gilt: $\Phi(M, x) \leq r(x, \Phi'(M, x))$.