Vorlesungsskript

Graphalgorithmen

Sommersemester 2013

Prof. Dr. Johannes Köbler
Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Komplexität und Kryptografie

28. Juni 2013

Inhaltsverzeichnis

1 Färben von Graphen

Definition 1. *Sei $G = (V, E)$ ein Graph und sei $k \in \mathbb{N}$.*

*a) Eine Abbildung $f\colon V \to \mathbb{N}$ heißt **Färbung** von G, wenn $f(u) \neq f(v)$ für alle $\{u, v\} \in E$ gilt.*

*b) G heißt **k-färbbar**, falls eine Färbung $f\colon V \to \{1, \ldots, k\}$ existiert.*

*c) Die **chromatische Zahl** ist*

$$\chi(G) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid G \text{ ist } k\text{-färbbar}\}.$$

Beispiel 2.

$$\chi(E_n) = 1,\ \chi(K_{n,m}) = 2,\ \chi(K_n) = n,$$

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2, & n \text{ gerade} \\ 3, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ein wichtiges Entscheidungsproblem ist, ob ein gegebener Graph k-färbbar ist. Dieses Problem ist für jedes feste $k \geq 3$ schwierig.

***k*-Färbbarkeit (*k*-Coloring):**

Gegeben: Ein Graph G.
Gefragt: Ist G k-färbbar?

Satz 3. k-Coloring *ist für $k \geq 3$ NP-vollständig.*

Lemma 4. $n/\alpha(G) \leq \chi(G) \leq n - \alpha(G) + 1$.

Beweis. Sei G ein Graph und sei c eine $\chi(G)$-Färbung von G. Da dann die Mengen $S_i = \{u \in V \mid c(u) = i\}$, $i = 1, \ldots, \chi(G)$, stabil sind, folgt $\|S_i\| \leq \alpha(G)$ und somit gilt

$$n = \sum_{i=1}^{\chi(G)} \|S_i\| \leq \chi(G)\alpha(G).$$

Für den Beweis von $\chi(G) \leq n - \alpha(G) + 1$ sei S eine stabile Menge in G mit $\|S\| = \alpha(G)$. Dann ist $G - S$ k-färbbar für ein $k \leq n - \|S\|$. Da wir alle Knoten in S mit der Farbe $k + 1$ färben können, folgt $\chi(G) \leq k + 1 \leq n - \alpha(G) + 1$. ■

Beide Abschätzungen sind scharf, können andererseits aber auch beliebig schlecht werden.

Lemma 5. $\binom{\chi(G)}{2} \leq m$.

Beweis. Zwischen je zwei Farbklassen einer optimalen Färbung muss es mindestens eine Kante geben. ■

Lemma 6. $\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Beweis. Betrachte folgenden Färbungsalgorithmus:

Algorithmus `greedy-color`

input ein Graph $G = (V, E)$ mit $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$
$c(v_1) := 1$
for $i := 2$ **to** n **do**
  $F_i := \{c(v_j) \mid j < i, v_j \in N(v_i)\}$
  $c(v_i) := \min\{k \geq 1 \mid k \notin F\}$

Da für die Farbe $c(v_i)$ von v_i nur $\|F_i\| \leq \Delta(G)$ Farben verboten sind, gilt $c(v_i) \leq \Delta(G) + 1$. ■

Satz 7 (Brooks 1941 (vereinfachter Beweis von Lovász, 1975))**.** *Sei G ein Graph mit $\Delta(G) \geq 3$. Dann gilt $\chi(G) = \Delta(G) + 1$ nur dann, wenn $K_{\Delta(G)+1}$ ein Teilgraph von G ist.*

Beweis. Wir führen Induktion über n. Für $n \leq 4$ gibt es genau 3 Graphen G mit $\Delta(G) \geq 3$. Diese erfüllen die Behauptung.

Sein nun G ein Graph mit $n > 4$ Knoten und Maximalgrad $d = \Delta(G) \geq 3$, der K_{d+1} nicht als Teilgraph enthält. Wir können annehmen, dass G zusammenhängend ist.

Falls es in G einen Knoten u mit $\deg(u) < d$ gibt, dann ist $G - u$ nach IV d-färbbar und somit auch G.

Es bleibt der Fall, dass alle Knoten u den Grad d haben. Da $G \neq K_{d+1}$ ist, folgt $n \geq d + 2$. Falls G einen Schnittknoten s hat, d.h. in $G - s$ gibt es $k \geq 2$ Komponenten $G_1, \ldots G_k$, folgt nach IV $\chi(G_i) \leq d$ und somit auch $\chi(G) \leq d$.

Behauptung 8. *In G gibt es einen Knoten u, der zwei Nachbarn a und b mit $\{a, b\} \notin E$ hat, so dass $G - \{a, b\}$ zusammenhängend ist.*

Da G den K_{d+1} nicht als Teilgraph enthält, hat jeder Knoten u zwei Nachbarn $v, w \in N(u)$ mit $\{v, w\} \notin E$. Falls $G - v$ 2-fach zusammenhängend ist, ist $G - \{v, w\}$ zusammenhängend und die Behauptung folgt.

Falls $G - v$ nicht 2-fach zusammenhängend ist, hat $G - v$ mindestens zwei 2-fach-Zusammenhangskomponenten (Blöcke) $B_1, \ldots, B_\ell$ der Blockbaum T hat mindestens zwei Blätter B_i, B_j. Da $\kappa(G) \geq 2$ ist, ist v in G zu mindestens einem Knoten in jedem Blatt B von T benachbart, der kein Schnittknoten ist. Wählen wir für a und b zwei dieser Knoten, so ist $G - \{a, b\}$ zusammenhängend und somit die Behauptung bewiesen.

Sei also u ein Knoten, der zwei Nachbarn a und b mit $\{a, b\} \notin E$ hat, so dass $G - \{a, b\}$ zusammenhängend ist. Wir wenden auf den Graphen $G - \{a, b\}$ eine Tiefensuche an mit Startknoten $u_1 = u$. Sei $(u_1, \ldots, u_{n-2})$ die Reihenfolge, in der die Knoten besucht werden. Nun lassen wir `greedy-color` mit der Reihenfolge $(a, b, u_{n-2}, \ldots, u_1)$ laufen.

Behauptung 9. `greedy-color` *benutzt $\leq d$ Farben.*

Die Knoten a und b erhalten die Farbe $c(a) = c(b) = 1$. Jeder Knoten u_i, $i > 1$, ist mit einem Knoten u_j mit $j < i$ verbunden. Daher ist seine Farbe $c(u_i) \leq \deg(u_i) \leq d$. Da $u = u_1$ bereits zwei Nachbarn a und b mit derselben Farbe hat, folgt auch $c(u) \leq d$. ■

Korollar 10. *Es gibt einen Linearzeitalgorithmus, der alle Graphen G mit $\Delta(G) \leq 3$ mit $\chi(G)$ Farben färbt.*

1.1 Färben von planaren Graphen

Ein Graph G heißt ***planar***, wenn er so in die Ebene einbettbar ist, dass sich zwei verschiedene Kanten höchstens in ihren Endpunkten berühren. Dabei werden die Knoten von G als Punkte und die Kanten von G als Verbindungslinien zwischen den zugehörigen Endpunkten dargestellt.

Bereits im 19. Jahrhundert wurde die Frage aufgeworfen, wie viele Farben höchstens benötigt werden, um eine Landkarte so zu färben, dass aneinander grenzende Länder unterschiedliche Farben erhalten. Offensichtlich lässt sich eine Landkarte in einen planaren Graphen transformieren, indem man für jedes Land einen Knoten zeichnet und benachbarte Länder durch eine Kante verbindet. Länder, die sich nur in einem Punkt berühren, gelten dabei nicht als benachbart.

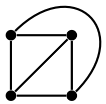
Die Vermutung, dass 4 Farben ausreichen, wurde 1878 von Kempe „bewiesen“ und erst 1890 entdeckte Heawood einen Fehler in Kempes „Beweis“. Übrig blieb der *5-Farben-Satz*. Der *4-Farben-Satz* wurde erst 1976 von Appel und Haken bewiesen. Hierbei handelt es sich jedoch nicht um einen Beweis im klassischen Sinne, da zur Überprüfung der vielen auftretenden Spezialfälle Computer benötigt werden.

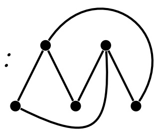
Satz 11 (Appel, Haken 1976)**.**
Jeder planare Graph ist 4-färbbar.

Aus dem Beweis des 4-Farben-Satzes von Appel und Haken lässt sich ein 4-Färbungsalgorithmus für planare Graphen mit einer Laufzeit von $\mathcal{O}(n^4)$ gewinnen.

In 1997 fanden Robertson, Sanders, Seymour und Thomas einen einfacheren Beweis für den 4-Farben-Satz, welcher zwar einen deutlich schnelleren $\mathcal{O}(n^2)$ Algorithmus liefert, aber auch nicht ohne Computer-Unterstützung verifizierbar ist.

Beispiel 12. *Wie die folgenden Einbettungen von K_4 und $K_{2,3}$ in die Ebene zeigen, sind K_4 und $K_{2,3}$ planar.*

K_4: 

$K_{2,3}$: 

◁

Um eine Antwort auf die Frage zu finden, ob auch K_5 und $K_{3,3}$ planar sind, betrachten wir die Gebiete von in die Ebene eingebetteten Graphen.

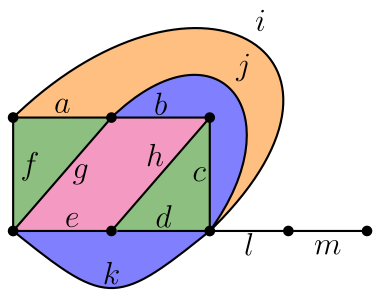
Durch die Kanten eines eingebetteten Graphen wird die Ebene in so genannte ***Gebiete*** unterteilt. Nur eines dieser Gebiete ist unbeschränkt und dieses wird als ***äußeres Gebiet*** bezeichnet. Die Anzahl der Gebiete von G bezeichnen wir mit $r(G)$ oder kurz mit r. Der ***Rand*** $rand(g)$ eines Gebiets g ist die (zirkuläre) Folge aller Kanten, die an g grenzen, wobei jede Kante so durchlaufen wird, dass g „in Fahrtrichtung links“ liegt bzw. bei Erreichen eines Knotens über eine Kante e, u über die im Uhrzeigersinn nächste Kante e' wieder verlassen wird. Die Anzahl der an ein Gebiet g grenzenden Kanten bezeichnen wir mit $d(g)$, wobei von g eingeschlossene Kanten doppelt gezählt werden.

Die Gesamtzahl $\sum_g d(g)$ aller Inzidenzen von Gebieten und Kanten bezeichnen wir mit $i(G)$. Da jede Kante genau 2 Inzidenzen zu dieser Summe beiträgt, folgt

$$\sum_g d(g) = i(G) = 2m(G).$$

Ein ***ebener Graph*** wird durch das Tripel $G = (V, E, R)$ beschrieben, wobei R aus den Rändern aller Gebiete von G besteht. Wir nennen G auch ***ebene Realisierung*** des Graphen (V, E). Durch R ist für jeden Knoten u die (zirkuläre) Ordnung π auf allen mit u inzidenten Kanten eindeutig festgelegt (und umgekehrt). Man nennt π das zu G gehörige ***Rotationssystem***. Dieses kann bei Verwendung der Adjazenzlistendarstellung, ohne zusätzlichen Platzaufwand gespeichert werden, indem man die zu u adjazenten Knoten gemäß π anordnet.

Beispiel 13. *Nebenstehender ebener Graph hat 13 Kanten $a, \ldots, m$ und 7 Gebiete mit den Rändern*



$$R = \{(a, f, g), (a, j, i), (b, g, e, h), (b, c, j), (c, h, d), (d, e, k), (f, i, l, m, m, l, k)\}.$$

Das zugehörige Rotationssystem ist

$$\pi = \{(a, f, i), (a, j, b, g), (b, c, h), (e, k, f, g), (d, e, h), (c, j, i, l, k, d), (l, m), (m)\}.$$

Man beachte, dass sowohl in R als auch in π jede Kante genau zweimal vorkommt. ◁

Satz 14 (Polyederformel von Euler, 1750)**.**
Für einen zusammenhängenden ebenen Graphen $G = (V, E, R)$ gilt

$$n(G) - m(G) + r(G) = 2. \qquad (*)$$

Beweis. Wir führen den Beweis durch Induktion über die Kantenzahl $m(G) = m$.

$m = 0$**:** Da G zusammenhängend ist, muss dann $n = 1$ sein.

Somit ist auch $r = 1$, also $(*)$ erfüllt.

$m - 1 \rightsquigarrow m$**:** Sei G ein zusammenhängender ebener Graph mit m Kanten.

Ist G ein Baum, so entfernen wir ein Blatt und erhalten einen zusammenhängenden ebenen Graphen G' mit $n-1$ Knoten, $m-1$ Kanten und r Gebieten. Nach IV folgt $(n-1)-(m-1)+r = 2$, d.h. $(*)$ ist erfüllt.

Falls G kein Baum ist, entfernen wir eine Kante auf einem Kreis in G und erhalten einen zusammenhängenden ebenen Graphen G' mit n Knoten, $m-1$ Kanten und $r-1$ Gebieten. Nach IV folgt $n-(m-1)+(r-1) = 2$ und daher ist $(*)$ auch in diesem Fall erfüllt. ■

Korollar 15. *Sei $G = (V, E)$ ein planarer Graph mit $n \geq 3$ Knoten. Dann ist $m \leq 3n - 6$. Falls G dreiecksfrei ist gilt sogar $m \leq 2n - 4$.*

Beweis. O.B.d.A. sei G zusammenhängend. Wir betrachten eine beliebige planare Einbettung von G. Da $n \geq 3$ ist, ist jedes Gebiet g von $d(g) \geq 3$ Kanten umgeben. Daher ist $2m = i = \sum_g d(g) \geq 3r$ bzw. $r \leq 2m/3$. Eulers Formel liefert

$$m = n + r - 2 \leq n + 2m/3 - 2,$$

was $(1 - 2/3)m \leq n - 2$ und somit $m \leq 3n - 6$ impliziert.

Wenn G dreiecksfrei ist, ist jedes Gebiet von $d(g) \geq 4$ Kanten umgeben. Daher ist $2m = i = \sum_g d(g) \geq 4r$ bzw. $r \leq m/2$. Eulers Formel liefert daher $m = n + r - 2 \leq n + m/2 - 2$, was $m/2 \leq n - 2$ und somit $m \leq 2n - 4$ impliziert. ■

Korollar 16. *K_5 ist nicht planar.*

Beweis. Wegen $n = 5$, also $3n - 6 = 9$, und wegen $m = \binom{5}{2} = 10$ gilt $m \not\leq 3n - 6$. ■

Korollar 17. *$K_{3,3}$ ist nicht planar.*

Beweis. Wegen $n = 6$, also $2n - 4 = 8$, und wegen $m = 3 \cdot 3 = 9$ gilt $m \not\leq 2n - 4$. ■

Als weitere interessante Folgerung aus der Polyederformel können wir zeigen, dass jeder planare Graph einen Knoten v vom Grad $deg(v) \leq 5$ hat.

Lemma 18. *Jeder planare Graph hat einen Minimalgrad $\delta(G) \leq 5$.*

Beweis. Für $n \leq 6$ ist die Behauptung klar. Für $n > 6$ impliziert die Annahme $\delta(G) \geq 6$ die Ungleichung

$$m = \tfrac{1}{2} \sum_{u \in V} deg(u) \geq \tfrac{1}{2} \sum_{u \in V} 6 = 3n,$$

was im Widerspruch zu $m \leq 3n - 6$ steht. ■

Definition 19. *Sei $G = (V, E)$ ein Graph und seien $u, v \in V$. Dann entsteht der Graph $G_{uv} = (V - \{v\}, E')$ mit*

$$E' = \{e \in E \mid v \notin e\} \cup \{\{u, v'\} \mid \{v, v'\} \in E - \{u, v\}\}.$$

durch ***Fusion*** *von u und v. Ist $e = \{u, v\}$ eine Kante von G (also $e \in E$), so sagen wir auch, G_{uv} ensteht aus G durch* ***Kontraktion*** *der Kante e. G heißt zu H* ***kontrahierbar****, falls H aus einer isomorphen Kopie von G durch eine Folge von Kontraktionen gewonnen werden kann.*

Satz 20 (Kempe 1878, Heawood 1890)**.**
Jeder planare Graph ist 5-färbbar.

Beweis. Wir beweisen den Satz durch Induktion über n.

$n = 1$**:** Klar.

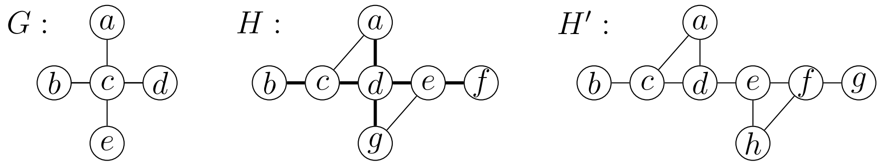
$n-1 \rightsquigarrow n$**:** Da G planar ist, existiert ein Knoten u mit $deg(u) \leq 5$. Zunächst entfernen wir u aus G. Falls u fünf Nachbarn hat, existieren zwei Nachbarn v und w, die nicht durch eine Kante verbunden sind, und wir fusionieren diese zu v.

Der resultierende Graph G' ist planar und hat $n' \leq n-1$ Knoten. Daher existiert nach IV eine 5-Färbung c' für G'. Da wir nun w mit $c'(v)$ färben können und somit die Nachbarn von u höchstens 4 verschiedene Farben haben, ist G 5-färbbar. ■

Definition 21. *Seien $G=(V,E)$ ein Graph, $v \in V$ und $e \in \binom{V}{2}$.*

- *Durch Entfernen des Knotens v entsteht der Graph $G[V-\{v\}]$ aus G, den wir mit* $\boldsymbol{G-v}$ *bezeichnen.*
- *Den Graphen $(V, E-\{e\})$ bezeichnen wir mit* $\boldsymbol{G-e}$ *und den Graphen $(V, E \cup \{e\})$ mit* $\boldsymbol{G \cup e}$.
- *Hat v den Grad 2 und sind u und w die beiden Nachbarn von v, so entsteht der Graph $G' = (G-v) \cup \{u,w\}$ durch* ***Überbrückung*** *von v aus G.*
- *H heißt* ***Unterteilung*** *von G, wenn G durch sukzessive Überbrückungen aus einer isomorphen Kopie von H entsteht.*

Beispiel 22. *Betrachte folgende Graphen.*



Offensichtlich ist H keine Unterteilung von G. Entfernen wir jedoch die beiden dünnen Kanten aus H, so ist der resultierende Teilgraph eine Unterteilung von G. Dagegen ist kein Teilgraph von H' eine Unterteilung von G. ◁

Kuratowski konnte 1930 beweisen, dass jeder nichtplanare Graph G eine Unterteilung des $K_{3,3}$ oder des K_5 als Teilgraph enthält. Für den Beweis benötigen wir noch folgende Notationen.

Definition 23. *Sei G ein Graph und sei K ein Kreis in G. Ein Teilgraph B von G heißt* ***Brücke*** *von K in G, falls*

- *B nur aus einer Kante besteht, die zwei Knoten von K verbindet, aber nicht auf K liegt, oder*
- *$B-K$ eine Zusammenhangskomponente von $G-K$ ist und B aus $B-K$ durch Hinzufügen aller Kanten zwischen $B-K$ und K (und der zugehörigen Endpunkte auf K) entsteht.*

Die Knoten von B, die auf K liegen heißen ***Kontaktpunkte*** *von B. Zwei Brücken B und B' von K heißen* ***inkompatibel***, *falls*

- *B Kontaktpunkte u,v und B' Kontaktpunkte u',v' hat, so dass diese vier Punkte in der Reihenfolge u,u',v,v' auf K liegen, oder*
- *B und B' mindestens 3 gemeinsame Kontaktpunkte haben.*

Es ist leicht zu sehen, dass ein Graph G genau dann planar ist, wenn sich die Brücken jedes Kreises K von G in höchstens zwei Mengen partitionieren lassen, so dass jede Menge nur kompatible Brücken enthält.

Satz 24 (Kuratowski 1930)**.**
Für einen Graphen G sind folgende Aussagen äquivalent:

- *G ist planar.*
- *Keine Unterteilung des $K_{3,3}$ oder des K_5 ist ein Teilgraph von G.*

Beweis. Wenn eine Unterteilung G' des $K_{3,3}$ oder des K_5 ein Teilgraph von G ist, so ist G' und folglich auch G nicht planar.

Sei nun $G=(V,E)$ nicht planar. Durch Entfernen von Knoten und Kanten erhalten wir einen 3-zusammenhängenden nicht planaren Teilgraphen $G'=(V',E')$, so dass $G'-e'$ für jede Kante $e' \in E'$ planar ist (siehe Übungen). Wir entfernen eine beliebige Kante $e_0 = \{a_0, b_0\}$ aus G'. Da $G'-e_0$ 2-zusammenhängend ist, gibt es einen Kreis durch die beiden Knoten a_0 und b_0 in $G'-e_0$. Sei H' eine ebene Realisierung von $G'-e_0$ und sei K ein Kreis durch die beiden Knoten a_0 und b_0.

Dabei wählen wir H' und K so, dass es keine ebene Realisierung H'' von $G' - e_0$ gibt, in der ein Kreis durch a_0 und b_0 existiert, der in H'' mehr Gebiete als K in H' einschließt.

Dann ist e_0 eine Brücke von K in G'. Die übrigen Brücken von K in G' sind auch Brücken von K in H'. Die Kanten jeder solchen Brücke B verlaufen entweder alle innerhalb oder alle außerhalb von K in H'. Im ersten Fall nennen wir B eine ***innere Brücke*** und im zweiten eine ***äußere Brücke***.

Für zwei Knoten a, b auf K bezeichnen wir mit $K[a, b]$ die Menge aller Knoten, die auf dem Bogen von a nach b (im Uhrzeigersinn) auf K liegen. Zudem sei $K[a, b) = K[a, b] \setminus \{b\}$. Die Mengen $K(a, b)$ und $K(a, b]$ sind analog definiert.

Behauptung 25. *Jede äußere Brücke B besteht aus einer Kante, die einen Knoten in $K(a_0, b_0)$ mit einem Knoten in $K(b_0, a_0)$ verbindet.*

Zum Beweis der Behauptung nehmen wir an, dass B mindestens 3 Kontaktpunkte oder mindestens einen Kontaktpunkt in $\{a_0, b_0\}$ hat. Dann liegen mindestens zwei dieser Punkte auf $K[a_0, b_0]$ oder auf $K[b_0, a_0]$. Folglich kann K zu einem Kreis K' erweitert werden, der mehr Gebiete einschließt (bzw. ausschließt) als K, was der Wahl von K und H' widerspricht.

Nun wählen wir eine innere Brücke B^*, die sowohl zu e_0 als auch zu einer äußeren Brücke $\hat{B}$ inkompatibel ist. Eine solche Brücke muss es geben, da wir sonst alle mit e_0 inkompatiblen inneren Brücken nach außen klappen und e_0 als innere Brücke hinzunehmen könnten, ohne die Planarität zu verletzen.

Sei $\hat{B} = \{a_1, b_1\}$. Da e_0 und $\hat{B}$ inkompatibel sind, können wir annehmen, dass diese vier Knoten in der Reihenfolge a_0, a_1, b_0, b_1 auf K liegen. Wir zeigen nun, dass G' eine Unterteilung des $K_{3,3}$ oder des K_5 als Teilgraph enthält. Hierzu geben wir entweder zwei disjunkte Mengen $A, B \subseteq V'$ mit jeweils 3 Knoten an, so dass 9 knotendisjunkte Pfade zwischen allen Knoten $a \in A$ und $b \in B$ existieren. Oder wir geben fünf Knoten an, zwischen denen 10 knotendisjunkte Pfade existieren.

Fall 1: B^* hat einen Kontaktpunkt $k_1 \notin \{a_0, a_1, b_0, b_1\}$. Aus Symmetriegründen können wir $k_1 \in K(a_0, a_1)$ annehmen. Da B^* weder zu e_0 noch zu $\hat{B}$ kompatibel ist, hat B^* weitere Kontaktpunkte $k_2 \in K(b_0, a_0)$ und $k_3 \in K(a_1, b_1)$, wobei $k_2 = k_3$ sein kann.

Fall 1a: $\exists k \in \{k_2, k_3\} \cap K(b_0, b_1)$. In diesem Fall existieren 9 knotendisjunkte Pfade zwischen $\{a_0, a_1, k\}$ und $\{b_0, b_1, k_1\}$.

Fall 1b: $\{k_2, k_3\} \cap K(b_0, b_1) = \emptyset$. In diesem Fall ist $k_2 \in K[b_1, a_0)$ und $k_3 \in K(a_1, b_0]$. Dann gibt es in B^* einen Knoten u, von dem aus 3 knotendisjunkte Pfade zu $\{k_1, k_2, k_3\}$ existieren. Folglich gibt es 9 knotendisjunkte Pfade zwischen $\{a_0, a_1, u\}$ und $\{k_1, k_2, k_3\}$.

Fall 2: B^* hat nur Kontaktpunkte $k \in \{a_0, a_1, b_0, b_1\}$. In diesem Fall müssen alle vier Punkte zu B^* gehören und es gibt in B^* einen a_0-b_0-Pfad P_0 sowie einen a_1-b_1-Pfad P_1.

Fall 2a: P_0 und P_1 haben nur einen Knoten u gemeinsam. Dann gibt es in B^* vier knotendisjunkte Pfade von u zu $\{a_0, a_1, b_0, b_1\}$ und somit 10 knotendisjunkte Pfade zwischen den Knoten u, a_0, a_1, b_0, b_1.

Fall 2b: P_0 und P_1 haben mindestens zwei Knoten gemeinsam. Seien u der erste und v der letzte Knoten auf P_0, die auch auf P_1 liegen. Dann gibt es in B^* drei knotendisjunkte Pfade zwischen u und allen Knoten in $\{v, a_0, a_1\}$ und zwei zwischen v und allen Knoten in $\{b_0, b_1\}$. Folglich gibt es 9 knotendisjunkte Pfade zwischen $\{a_0, a_1, v\}$ und $\{b_0, b_1, u\}$. ■

Definition 26. *Seien G, H Graphen. H heißt* ***Minor*** *von G, wenn sich H aus einem zu G isomorphen Graphen durch wiederholte Anwendung folgender Operationen gewinnen lässt:*

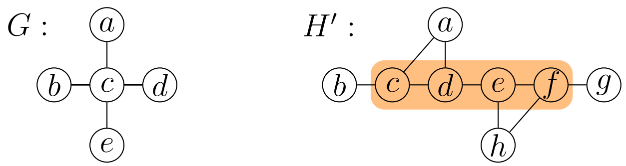
- *Entfernen von Kanten,*

- *Entfernen von isolierten Knoten und*
- *Kontraktion von Kanten.*

*G heißt **H-frei**, falls H kein Minor von G ist. Für eine Menge $\mathcal{H}$ von Graphen heißt G **$\mathcal{H}$-frei**, falls G für alle $H \in \mathcal{H}$ H-frei ist.*

Da die Kantenkontraktionen zuletzt ausgeführt werden können, ist H genau dann ein Minor von G, wenn ein Teilgraph von G zu H kontrahierbar ist. Zudem ist leicht zu sehen, dass G und H genau dann Minoren voneinander sind, wenn sie isomorph sind.

Beispiel 27. *Wir betrachten nochmals die Graphen G und H'.*

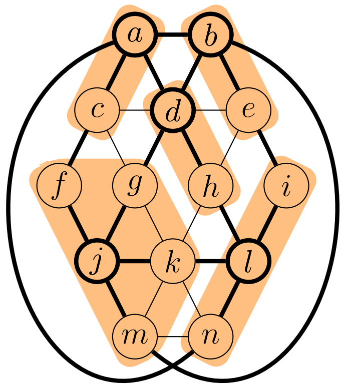


G ist ein Minor von H', da durch Fusion der Knoten c, d, e, f ein zu G isomorpher Graph aus H' entsteht. ◁

Wagner beobachtete, dass sich aus dem Satz von Kuratowski folgende Charakterisierung der Klasse der planaren Graphen ableiten lässt (siehe Übungen).

Korollar 28 (Wagner 1937)**.** *Ein Graph ist genau dann planar, wenn er $\{K_{3,3}, K_5\}$-frei ist.*

Beispiel 29. *Betrachte folgenden Graphen.*



Durch Entfernen der dünnen Kanten entsteht eine Unterteilung des K_5. Aus dieser erhalten wir den K_5, indem wir alle dünn umrandeten Knoten (also alle Knoten vom Grad 2) überbrücken.

Alternativ lässt sich der K_5 auch durch Fusion aller Knoten in den farblich unterlegten Umgebungen der dick umrandeten Knoten gewinnen. ◁

Definition 30. *Sei $\leq$ eine binäre Relation auf einer Menge A.*

*a) $(A, \leq)$ heißt **Quasiordnung**, wenn $\leq$ reflexiv und transitiv auf A ist.*

*b) $(A, \leq)$ heißt **Wohlquasiordnung**, wenn es zudem zu jeder Folge $a_1, a_2, \ldots$ von Elementen aus A Indizes $i < j$ mit $a_i \leq a_j$ gibt.*

Proposition 31. *Eine Quasiordnung $(A, \leq)$ ist genau dann eine Wohlquasiordnung, wenn es in $(A, \leq)$ weder unendliche absteigende Ketten $a_1 > a_2 > \cdots$ noch unendliche Antiketten B gibt (d.h. für alle $b \neq b' \in B$ gilt weder $b \leq b'$ noch $b' \leq b$).*

Beweis. Es ist klar, dass $(A, \leq)$ keine Wohlquasiordnung ist, wenn es eine unendliche absteigende Kette oder eine unendliche Antikette gibt.

Wenn umgekehrt weder unendliche absteigende Ketten noch unendliche Antikette existieren, so können wir in jeder Folge $a_1, a_2, \ldots$ alle

Elemente a_j streichen, für die ein $i < j$ existiert, so dass $a_i > a_j$ ist. Da hierbei von jeder absteigenden Kette ein Element in der Folge verbleibt und alle diese Ketten endlich sind, enthält die verbleibende Folge immer noch unendlich viele Elemente.

Als nächstes streichen wir alle Elemente a_j, für die ein $i < j$ existiert, so dass a_i und a_j unvergleichbar sind. Die verbleibende Folge ist dann immer noch unendlich und sogar monoton, d.h. es gilt $a_i \leq a_{i+1}$ für alle i. ■

Proposition 32. *In einer Wohlquasiordnung $(A, \leq)$ hat jede Teilmenge $B \subseteq A$ bis auf Äquivalenz nur endlich viele minimale Elemente. Dabei heißen $a, b \in A$* ***äquivalent****, falls $a \leq b$ und $b \leq a$ gilt.*

Satz 33 (Satz von Robertson und Seymour, 1983-2004)**.** *Die Minorenrelation bildet auf der Menge aller endlichen ungerichteten Graphen eine Wohlquasiordnung.*

Korollar 34. *Sei $\mathcal{K}$ eine Graphklasse, die unter Minorenbildung abgeschlossen ist (d.h. wenn $G \in \mathcal{K}$ und H ein Minor von G ist, dann folgt $H \in \mathcal{K}$). Dann gibt es eine endliche Menge $\mathcal{H}$ von Graphen mit*

$$\mathcal{K} = \{G \mid G \textit{ ist } \mathcal{H}\textit{-frei}\}.$$

Die Graphen in $\mathcal{H}$ sind bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt und heißen ***verbotene Minoren*** für die Klasse $\mathcal{K}$. Für den Beweis des Korollars betrachten wir die komplementäre Klasse $\overline{\mathcal{K}}$ aller endlichen Graphen, die nicht zu $\mathcal{K}$ gehören. Nach Satz 33 in Kombination mit Proposition 32 hat $\overline{\mathcal{K}}$ bis auf Isomorphie nur endlich viele minimale Elemente. Da mit H auch jeder Graph G, der H als Minor enthält, zu $\overline{\mathcal{K}}$ gehört, gibt es demnach eine endliche Menge $\mathcal{H}$ von Graphen mit

$$\overline{\mathcal{K}} = \{G \mid \exists H \in \mathcal{H} : H \text{ ist ein Minor von } G\},$$

womit Korollar 34 bewiesen ist.

Das Problem, für zwei gegebene Graphen G und H zu entscheiden, ob H ein Minor von G ist, ist zwar NP-vollständig. Für einen festen Graphen H ist das Problem dagegen effizient entscheidbar.

Satz 35 (Robertson und Seymour, 1995)**.** *Für jeden Graphen H gibt es einen $O(n^3)$-zeitbeschränkten Algorithmus, der für einen gegebenen Graphen G entscheidet, ob er H-frei ist.*

Korollar 36. *Die Zugehörigkeit zu jeder unter Minorenbildung abgeschlossenen Graphklasse $\mathcal{K}$ ist in P entscheidbar.*

Der Entscheidungsalgorithmus für $\mathcal{K}$ lässt sich allerdings nur angeben, wenn wir die verbotenen Minoren für $\mathcal{K}$ kennen. Leider ist der Beweis von Theorem 33 in dieser Hinsicht nicht konstruktiv, so dass der Nachweis, dass $\mathcal{K}$ unter Minorenbildung abgeschlossen ist, nicht automatisch zu einem effizienten Erkennungsalgorithmus für $\mathcal{K}$ führt.

1.2 Färben von chordalen Graphen

Definition 37. *Ein Graph $G = (V, E)$ heißt* ***chordal****, wenn er keinen induzierten Kreis der Länge ≥ 4 enthält.*

Ein induzierter Kreis $G[\{u_1, \dots, u_k\}]$ enthält also nur die Kreiskanten $\{u_1, u_2\}, \dots, \{u_{k-1}, u_k\}, \{u_k, u_1\}$, aber keine ***Sehnen*** $\{u_i, u_j\}$ mit $i - j \not\equiv_k \pm 1$.

Definition 38. *Sei G ein Graph. Eine Menge $S \subseteq V$ heißt* ***Separator*** *von G, wenn $G - S$ mehr Komponenten als G hat.*

Lemma 39. *Für einen Graphen G sind folgende Aussagen äquivalent.*

(i) G ist chordal.

(ii) Jeder inklusionsminimale Separator von G ist eine Clique.

(iii) Jedes Paar von nicht adjazenten Knoten x und y in G hat einen inklusionsminimalen x-y-Separator S, der eine Clique ist.

Beweis. Sei G chordal und sei S ein minimaler Separator von G. Dann hat $G - S$ mindestens zwei Komponenten $G[V_1]$ und $G[V_2]$. Angenommen, S enthält zwei nicht adjazente Knoten x und y. Da S minimal ist, sind beide Knoten sowohl mit $G[V_1]$ als auch mit $G[V_2]$ verbunden. Betrachte die beiden Teilgraphen $G_i = G[V_i \cup \{x, y\}]$ und wähle jeweils einen kürzesten x-y-Pfad P_i in G_i. Da diese eine Länge ≥ 2 haben, bilden sie zusammen einen Kreis $K = P_1 \cup P_2$ der Länge ≥ 4. Aufgrund der Konstruktion von K ist klar, dass K keine Sehne in G hat. Dies zeigt, dass die erste Aussage die zweite impliziert.

Dass die zweite die dritte impliziert, ist klar. Um zu zeigen, dass die erste aus der dritten folgt, nehmen wir an, dass G nicht chordal ist. Dann gibt es in G einen induzierten Kreis K der Länge ≥ 4. Seien x und y zwei beliebige nicht adjazente Knoten auf K und sei S ein minimaler x-y-Separator in G. Dann muss S mindestens zwei nicht adjazente Knoten aus K enthalten. ∎

Definition 40. *Sei $G = (V, E)$ ein Graph und sei $k \geq 0$. Ein Knoten $u \in V$ heißt* ***k-simplizial*** *in G, wenn die Nachbarschaft $N(u)$ eine Clique der Größe k in G bildet. Jeder k-simpliziale Knoten wird auch als* ***simplizial*** *bezeichnet.*

Zusammenhängende chordale Graphen können als eine Verallgemeinerung von Bäumen aufgefasst werden. Ein Graph G ist ein Baum, wenn er aus K_1 durch sukzessives Hinzufügen von 1-simplizialen Knoten erzeugt werden kann. Entsprechend heißt G ***k-Baum***, wenn G aus K_k durch sukzessives Hinzufügen von k-simplizialen Knoten erzeugt werden kann. Wir werden sehen, dass ein zusammenhängender Graph G genau dann chordal ist, wenn er aus einem isolierten Knoten (also aus einer 1-Clique) durch sukzessives Hinzufügen von simplizialen Knoten erzeugt werden kann. Äquivalent hierzu ist, dass G durch sukzessives Entfernen von simplizialen Knoten auf einen isolierten Knoten reduziert werden kann.

Definition 41. *Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Eine lineare Ordnung $(v_1, \ldots, v_n)$ auf V heißt* ***perfekte Eliminationsordnung*** *von G, wenn v_i simplizial in $G[\{v_1, \ldots, v_i\}]$ für $i = 1, \ldots, n$ ist.*

Lemma 42. *Jeder nicht vollständige chordale Graph $G = (V, E)$ besitzt mindestens zwei simpliziale Knoten, die nicht durch eine Kante verbunden sind.*

Beweis. Wir führen Induktion über n. Für $n \leq 2$ ist die Behauptung klar. Sei G ein zusammenhängender Graph mit $n \geq 3$ Knoten. Falls G nicht vollständig ist, enthält G zwei nichtadjazente Knoten x_1 und x_2. Sei S ein minimaler x_1-x_2-Separator und seien $G[V_1]$ und $G[V_2]$ die beiden Komponenten von $G - S$ mit $x_i \in V_i$. Nach Lemma 39 ist S eine Clique in G. Betrachte die Teilgraphen $G_i = G[V_i \cup S]$. Da G_i chordal ist und weniger als n Knoten hat, ist $V_i \cup S$ entweder eine Clique oder G_i enthält mindestens zwei nicht adjazente simpliziale Knoten y_i, z_i, wovon höchstens einer zu S gehört. Da im zweiten Fall y_i oder z_i in V_i ist, ist mindestens einer der drei Knoten x_i, y_i und z_i ohne Nachbarn in $G[V_{3-i}]$ und somit auch simplizial in G. ∎

Satz 43. *Ein Graph ist genau dann chordal, wenn er eine perfekte Eliminationsordnung hat.*

Beweis. Falls G chordal ist, lässt sich eine perfekte Eliminationsordnung gemäß Lemma 42 bestimmen, indem wir beginnend mit $i = n$ sukzessive einen simplizialen Knoten v_i in $G[V - \{v_{i+1}, \ldots, v_n\}]$ wählen.

Für die umgekehrte Richtung sei $(v_1, \ldots, v_n)$ eine perfekte Eliminationsordnung von G. Wir zeigen induktiv, dass $G_i = G[\{v_1, \ldots, v_i\}]$ chordal ist. Da v_{i+1} simplizial in G_{i+1} ist, enthält jeder Kreis K der Länge ≥ 4 in G_{i+1}, auf dem v_{i+1} liegt, eine Sehne zwischen den beiden Kreisnachbarn von v_{i+1}. Daher ist mit G_i auch G_{i+1} chordal. ∎

Korollar 44. *Es gibt einen Algorithmus A, der das Erkennungsproblem für chordale Graphen in Polynomialzeit löst. A gibt zudem eine perfekte Eliminationsordnung, eine k-Färbung sowie eine k-Clique mit $k = \chi(G) = \omega(G)$ von G aus, falls G chordal ist, und andernfalls einen induzierten Kreis der Länge ≥ 4.*

Beweis. A versucht wie im Beweis von Theorem 43 beschrieben, eine perfekte Eliminationsordnung zu bestimmen. Stellt sich heraus, dass $G_i = G[V - \{v_{i+1}, \ldots, v_n\}]$ keinen simplizialen Knoten v_i hat, so ist G_i wegen Lemma 42 nicht chordal. Folglich gibt es wegen Lemma 39 in G_i zwei nicht adjazente Knoten x und y, so dass kein minimaler x-y-Separator S eine Clique ist. Wie im Beweis von Lemma 39 beschrieben, lässt sich mithilfe von S ein induzierter Kreis K der Länge ≥ 4 in G_i konstruieren. Da G_i ein induzierter Teilgraph von G ist, ist K auch ein induzierter Kreis in G.

Gelingt die Konstruktion einer perfekten Eliminationsordnung $(v_1, \ldots, v_n)$ für G, so benutzen wir `greedy-color` mit dieser Reihenfolge, um eine Färbung $f : G \to \{1, \ldots, k\}$ für G zu berechnen. Ist v_i ein beliebiger Knoten mit $f(v_i) = k$, so muss v_i mindestens $k - 1$ Nachbarn in der Menge $\{v_1, \ldots, v_{i-1}\}$ haben. Folglich bildet v_i zusammen mit diesen Nachbarn eine k-Clique, woraus $k = \chi(G) = \omega(G)$ folgt. ■

1.3 Kantenfärbungen

Definition 45. *Sei $G = (V, E)$ ein Graph und sei $k \in \mathbb{N}$.*

a) Eine Abbildung $f\colon E \to \mathbb{N}$ heißt ***Kantenfärbung*** *von G, wenn $f(e) \neq f(e')$ für alle Kanten e, e' mit $e \cap e' \neq \emptyset$ gilt.*

b) G heißt ***k-kantenfärbbar****, falls eine Kantenfärbung $f\colon E \to \{1, \ldots, k\}$ existiert.*

c) Die ***kantenchromatische Zahl*** *oder der* ***chromatische Index*** *von G ist*

$$\chi'(G) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid G \text{ ist } k\text{-kantenfärbbar}\}.$$

Ist f eine k-Kantenfärbung von G, so bildet jede ***Farbklasse*** $M_i = \{e \in E \mid f(e) = i\}$ ein Matching in G, d.h. f zerlegt E in k disjunkte Matchings $M_1, \ldots, M_k$. Umgekehrt liefert jede Zerlegung von E in k disjunkte Matchings eine k-Kantenfärbung von G.

Beispiel 46.

$$\chi'(C_n) = \begin{cases} 3, & n \text{ ungerade,} \\ 2, & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$\chi'(K_n) = 2\lceil n/2 \rceil - 1 = \begin{cases} n, & n \text{ ungerade,} \\ n-1, & \text{sonst,} \end{cases}$$

(siehe Übungen).

Lemma 47. *Für jeden nicht leeren Graphen gilt $\Delta \leq \chi' \leq 2\Delta - 1$ und $m/\mu \leq \chi' \leq 2\lceil n/2 \rceil - 1$.*

Beweis. Siehe Übungen. ■

Korollar 48. *Für jeden nicht leeren k-regulären Graphen mit einer ungeraden Knotenzahl gilt $\chi'(G) > k$.*

Beweis. Wegen $\mu \leq (n-1)/2$ und $2m = n\Delta$ folgt $\chi' \geq m/\mu \geq n\Delta/(n-1) > \Delta = k$. ■

Lemma 49. *Für jeden bipartiten Graphen gilt $\chi' = \Delta$.*

Beweis. Siehe Übungen. Dort wird die Aussage sogar für bipartite *Multigraphen* (d.h. zwei Knoten können durch mehrere Kanten verbunden sein) bewiesen. ■

Als nächstes geben wir einen Algorithmus an, der für jeden Graphen G eine $(\Delta(G)+1)$-Kantenfärbung berechnet. Für den Beweis benötigen wir folgende Begriffe.

Definition 50. *Sei $G = (V, E)$ ein Graph.*

*a) Ein Knoten $u \in V$ heißt **d-gradig**, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:*

- $\deg(u) \le d$,
- *alle Nachbarn $v \in N(u)$ haben einen Grad $\deg(v) \le d$ und*
- $\|\{v \in N(u) \mid \deg(v) = d\}\| \le 1$.

*b) u heißt **stark d-gradig**, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:*

- $\deg(u) = d$,
- *für alle $v \in N(u)$ gilt $d - 1 \le \deg(v) \le d$ und*
- $\|\{v \in N(u) \mid \deg(v) = d\}\| = 1$.

Sei u ein Knoten in einem Graphen G und sei f eine k-Kantenfärbung von $G - u$ mit zugehöriger Partition $M_1, \ldots, M_k$. Dann bezeichnet $N_i(u) = N(u) \cap \mathit{free}(M_i)$ die Menge der Nachbarn v von u, für die die Farbe i noch frei ist (d.h. es ist möglich, die Kante $\{u, v\}$ mit i zu färben). Wir sagen f ***blockiert*** die Farbe i, falls $N_i(u) = \emptyset$ ist.

Das nächste Lemma ist eine direkte Folgerung aus obiger Definition.

Lemma 51. *Sei u ein stark k-gradiger Knoten in G und sei f eine k-Kantenfärbung von $G - u$. Dann erfüllen die Anzahlen $a_i = \|N_i(u)\|$ folgende Bedingungen:*

(i) $\sum_{i=1}^{k} a_i = 2k - 1$,

(ii) falls f eine Farbe blockiert, dann gibt es eine Farbe j mit $a_j \ge 3$,

(iii) falls f keine Farbe blockiert, dann gibt es eine Farbe j mit $a_j = 1$.