Übungsblatt 2

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 11. Mai 2017

Aufgabe 8 ***mündlich***

Die *Zusammenhangszahl* $\kappa(G)$ eines Graphen G ist die größte Zahl $k < n$, so dass $G - V'$ für jede Menge V' von $k-1$ Knoten zusammenhängend ist. G heißt *k-fach zusammenhängend*, falls $\kappa(G) \geq k$ ist. Zeigen Sie:

(a) G ist genau dann 2-fach zusammenhängend, wenn je 2 Knoten von G auf einem gemeinsamen Kreis K liegen.

Hinweis: Benutzen Sie den Satz von Menger: G ist genau dann *k-fach zusammenhängend*, wenn je zwei Knoten u und v in G durch mindestens k knotendisjunkte Pfade verbunden sind (d.h. je 2 solche Pfade haben außer u und v keinen gemeinsamen Knoten).

(b) Sei die Relation $\sim$ auf E definiert durch $e \sim e'$, falls e und e' auf einem gemeinsamen Kreis liegen. Dann ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation.

(c) Seien $E_1, \dots, E_k$ die Äquivalenzklassen von $\sim$ und $V_i = V(E_i)$ die zugehörigen Knotenmengen. Dann gilt $\|V_i \cap V_j\| \leq 1$ für alle $i \neq j$.
Bemerkung: Die Teilgraphen $B_i = (V_i, E_i)$ heißen *Blöcke* und die Knoten $u \in V_i \cap V_j$ heißen *Artikulationen* oder *Schnittknoten* von G.

(d) G ist genau dann 2-fach zusammenhängend, wenn G aus einem einzigen Block besteht (also $k = 1$ ist).

(e) Sei B der Graph, dessen Knotenmenge aus allen Blöcken und Artikulationen von G besteht und in dem jeder Block zu allen darin enthaltenen Artikulationen adjazent ist. Dann ist B ein Wald.

(f) G ist genau dann zusammenhängend, wenn B zusammenhängend ist (in diesem Fall heißt B der *BC-Baum (block cut tree)* von G).

Aufgabe 9 Sei G ein Graph. Zeigen Sie: ***mündlich***

(a) Jeder Minor H von G mit $\Delta(H) \leq 3$ ist auch ein topologischer Minor von G.

(b) Falls G nicht planar ist, hat G einen 2-fach zusammenhängenden Untergraphen $G' = (V', E')$ und einen 3-fach zusammenhängenden topologischen Minor $G'' = (V'', E'')$, die ebenfalls nicht planar sind, so dass $G' - e'$ und $G'' - e''$ für alle $e' \in E'$ und $e'' \in E''$ planar sind.

Aufgabe 10 ***mündlich***

Seien $H = (V, E, R)$ und $H' = (V, E, S)$ ebene Realisierungen eines Graphen $G = (V, E)$. H und H' heißen *äquivalent*, wenn $R \in \{S, S^R\}$ ist (d.h. $R = S$ oder R entsteht aus S durch Spiegelung aller Ränder).

(a) Finden Sie einen Graphen mit möglichst wenigen Knoten (Kanten), der mindestens 2 inäquivalente ebene Realisierungen hat.

(b) Zeigen Sie, dass $\kappa(G) \leq 2$ ist, falls es in H ein Gebiet gibt, dessen Kanten einen Kreis mit mindestens 2 Brücken in G bilden.

(c) Zeigen Sie, dass jedes Gebiet g in H, dessen Kanten einen Kreis mit höchstens einer Brücke bilden, äquivalent zu einem Gebiet g' in H' ist (d.h. $g = g'$ oder g entsteht aus g' durch Spiegelung des Randes).

(d) Zeigen Sie, dass alle ebenen Realisierungen eines 3-fach zusammenhängenden Graphen G äquivalent sind (Satz von Whitney).

Aufgabe 11 ***10 Punkte***

Ein Graph G heißt *outerplanar*, falls G eine ebene Realisierung hat, in der alle Knoten an das äußere Gebiet grenzen. Zeigen Sie:

(a) G ist genau dann outerplanar, wenn G weder den $K_{2,3}$ noch den K_4 als Minor enthält. (*Hinweis:* Betrachten Sie den Graphen $G \times K_1$.)

(b) Finden Sie einen möglichst effizienten Algorithmus, der für jeden Eingabegraphen G entweder eine $\chi(G)$-Färbung oder einen topologischen Minor H von G mit $\delta(H) > 2$ (als Zertifikat, dass G nicht outerplanar ist) ausgibt. (*Hinweis:* Zeigen Sie, dass $\delta(G) \leq 2$ für jeden outerplanaren Graphen G gilt.)