# Übungsblatt 8

***Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 13. Juli 2017***

**Aufgabe 43** ***mündlich***

Zeigen Sie, dass ein Baum höchstens ein perfektes Matching hat.

**Aufgabe 44** ***mündlich***

Entwerfen Sie einen möglichst effizienten Algorithmus, der ein maximales Matching für einen gegebenen Baum berechnet.

**Aufgabe 45** ***mündlich***

Ein Teilgraph $W$ eines Graphen $G = (V, E)$ heißt *Spannwald*, falls er alle Knoten von $G$ enthält und ein Wald (also kreisfrei) ist. Entwerfen Sie einen möglichst effizienten Algorithmus, der für einen gegebenen Graphen $G$ einen Spannwald $W$ mit möglichst wenigen Kanten bestimmt, der nicht mehr isolierte Knoten als $G$ hat.

**Aufgabe 46** ***mündlich***

Beweisen Sie den Heiratssatz: Ein bipartiter Graph $G = (U, W, E)$ besitzt genau dann ein Matching, das keinen Knoten in $U$ frei lässt, wenn $\|N(A)\| \geq \|A\|$ für jede Teilmenge $A \subseteq U$ gilt.

*Hinweis:* Benutzen Sie das Min-Cut-Max-Flow-Theorem.

**Aufgabe 47** ***mündlich***

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Sei $U \subseteq V$ eine unabhängige Knotenmenge, so dass $\deg(u) \geq \deg(v)$ für alle Knoten $u \in U$ und $v \in N(U)$ gilt. Zeigen Sie, dass $G$ ein Matching $M$ hat, das keinen Knoten in $U$ frei lässt.

*Hinweis:* Betrachten Sie den bipartiten Graphen $G' = (U, W, E')$, der aus $G$ durch Entfernen aller Kanten zwischen 2 Knoten in $W = V \setminus U$ entsteht, und verwenden Sie den Heiratssatz.

**Aufgabe 48** ***mündlich***

Seien $A = \{A_1, \ldots, A_k\}$ und $B = \{B_1, \ldots, B_k\}$ Partitionen einer $n$-elementigen Menge $V$. Entwerfen Sie einen möglichst effizienten Algorithmus, der eine $k$-elementige Teilmenge $R \subseteq V$ berechnet, die sowohl ein Repräsentantensystem für $A$ als auch für $B$ ist.

**Aufgabe 49** Sei $G = (V, E)$ ein Graph. ***mündlich***

(a) Zeigen Sie, dass $\kappa(G) \leq 2m/n$ (Durchschnittsgrad) ist.

(b) Finden Sie einen Algorithmus, der $\kappa(G)$ in Zeit $O(\sqrt{n^5}m)$ berechnet.

*Hinweis:* Benutzen Sie den Algorithmus von Dinitz, um für alle Paare $\{x, y\} \notin E$ einen kleinsten $x$-$y$-Separator zu berechnen.

(c) Verbessern Sie die Laufzeit auf $O(\sqrt{n}m^2)$.

*Hinweis:* Zeigen Sie, dass es genügt, $\mathcal{O}(\kappa(G)n)$ Knotenpaare zu betrachten.

**Aufgabe 50** ***10 Punkte***

Gegeben sind $k$ Arbeiter $A_1, \ldots, A_k$ und $\ell$ Maschinen $M_1, \ldots, M_\ell$ sowie eine Menge $E \subseteq \{1, \ldots, k\} \times \{1, \ldots, \ell\}$ von Jobs.

(a) Zeigen Sie, dass jeder bipartite Graph $G = (V_1, V_2, E)$ ein Matching $M$ besitzt, in dem kein Knoten $u$ vom Grad $\deg(u) = \Delta(G)$ frei bleibt.

*Hinweis:* Konstruieren Sie $M$ aus 2 Matchings $M_i$ ($i = 1, 2$), die keinen Knoten $u \in V_i$ vom Grad $\deg(u) = \Delta(G)$ frei lassen. Bei der Konstruktion von $M_i$ können Sie Aufgabe 47 verwenden.

(b) Bestimmen Sie die Zeit, die zur Erledigung aller Jobs in $E$ benötigt wird, falls jeder Job $(i, j) \in E$ in einer Zeiteinheit und zwar nur von Arbeiter $A_i$ an Maschine $M_j$ erledigt werden kann und jeder Arbeiter und jede Maschine in jeder Zeiteinheit maximal einen Job übernehmen kann.

*Hinweis:* Teilaufgabe (a).

(c) Finden Sie einen möglichst effizienten Algorithmus, der einen Zeitplan zur Erledigung aller Jobs in minimaler Zeit erstellt.