

Vorlesungsskript  
Graphalgorithmen

Sommersemester 2021

Prof. Dr. Johannes Köbler  
Humboldt-Universität zu Berlin  
Lehrstuhl Komplexität und Kryptografie

29. April 2021

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Graphentheoretische Grundlagen</b>	<b>1</b>
<b>2 Färben von Graphen</b>	<b>3</b>
2.1 Färben von planaren Graphen . . . . .	4
2.2 Färben von chordalen Graphen . . . . .	10

# 1 Graphentheoretische Grundlagen

**Definition 1.1.** Ein (**ungerichteter**) **Graph** ist ein Paar  $G = (V, E)$ , wobei

$V$  - eine endliche Menge von **Knoten/Ecken** und

$E$  - die Menge der **Kanten** ist.

Hierbei gilt

$$E \subseteq \binom{V}{2} = \{\{u, v\} \subseteq V \mid u \neq v\}.$$

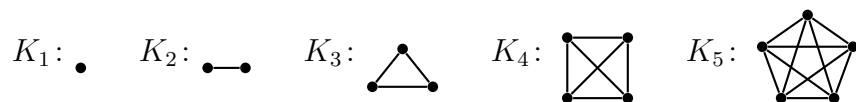
Sei  $v \in V$  ein Knoten.

- Die **Nachbarschaft** von  $v$  ist  $N_G(v) = \{u \in V \mid \{u, v\} \in E\}$ .
- Der **Grad** von  $v$  ist  $\deg_G(v) = |N_G(v)|$ .
- Der **Minimalgrad** von  $G$  ist  $\delta(G) = \min_{v \in V} \deg_G(v)$  und der **Maximalgrad** von  $G$  ist  $\Delta(G) = \max_{v \in V} \deg_G(v)$ .
- Jeder Knoten  $u \in V$  vom Grad  $\leq 1$  heißt **Blatt** und die übrigen Knoten (vom Grad  $\geq 2$ ) heißen **innere Knoten** von  $G$ .

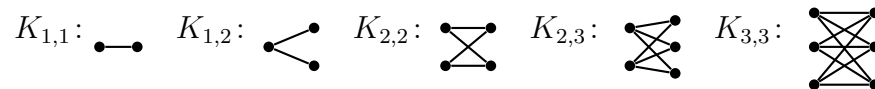
Falls  $G$  aus dem Kontext ersichtlich ist, schreiben wir auch einfach  $N(v)$ ,  $\deg(v)$ ,  $\delta$  usw.

**Beispiel 1.2.**

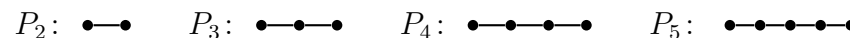
- Der **vollständige Graph**  $(V, E)$  auf  $n$  Knoten, d.h.  $|V| = n$  und  $E = \binom{V}{2}$ , wird mit  $K_n$  und der **leere Graph**  $(V, \emptyset)$  auf  $n$  Knoten wird mit  $E_n$  bezeichnet.



- Der **vollständige bipartite Graph**  $(A, B, E)$  auf  $a + b$  Knoten, d.h.  $A \cap B = \emptyset$ ,  $|A| = a$ ,  $|B| = b$  und  $E = \{\{u, v\} \mid u \in A, v \in B\}$  wird mit  $K_{a,b}$  bezeichnet.



- Der **Pfad** mit  $n$  Knoten wird mit  $P_n$  bezeichnet.



- Der **Kreis** mit  $n$  Knoten wird mit  $C_n$  bezeichnet.



**Definition 1.3.** Sei  $G = (V, E)$  ein Graph.

- Eine Knotenmenge  $U \subseteq V$  heißt **unabhängig** oder **stabil**, wenn es keine Kante von  $G$  mit beiden Endpunkten in  $U$  gibt, d.h. es gilt  $E \cap \binom{U}{2} = \emptyset$ . Die **Stabilitätszahl** ist

$$\alpha(G) = \max\{|U| \mid U \text{ ist stabile Menge in } G\}.$$

- Eine Knotenmenge  $U \subseteq V$  heißt **Clique**, wenn jede Kante mit beiden Endpunkten in  $U$  in  $E$  ist, d.h. es gilt  $\binom{U}{2} \subseteq E$ . Die **Cliquenzahl** ist

$$\omega(G) = \max\{|U| \mid U \text{ ist Clique in } G\}.$$

- Ein Graph  $G' = (V', E')$  heißt **Sub-/Teil-/Untergraph** von  $G$ , falls  $V' \subseteq V$  und  $E' \subseteq E$  ist. Im Fall  $V' = V$  wird  $G'$  auch ein **(auf)spannender Teilgraph** von  $G$  genannt und wir schreiben für  $G'$  auch  $G - E''$  (bzw.  $G = G' \cup E''$ ), wobei  $E'' = E - E'$  die Menge der aus  $G$  entfernten Kanten ist. Im Fall  $E'' = \{e\}$  schreiben wir für  $G'$  auch einfach  $G - e$  (bzw.  $G = G' \cup e$ ).

- d) Ein  $k$ -regulärer spannender Teilgraph von  $G$  wird auch als  **$k$ -Faktor** von  $G$  bezeichnet. Ein  $d$ -regulärer Graph  $G$  heißt  **$k$ -faktorisierbar**, wenn sich  $G$  in  $l = d/k$  kantendisjunkte  $k$ -Faktoren  $G_1, \dots, G_l$  zerlegen lässt.
- e) Ein Subgraph  $G' = (V', E')$  heißt (**durch  $V'$** ) **induziert**, falls  $E' = E \cap \binom{V'}{2}$  ist. Für  $G'$  schreiben wir dann auch  $G[V']$  oder  $G - V''$ , wobei  $V'' = V - V'$  die Menge der aus  $G$  entfernten Knoten ist. Ist  $V'' = \{v\}$ , so schreiben wir für  $G'$  auch einfach  $G - v$  und im Fall  $V' = \{v_1, \dots, v_k\}$  auch  $G[v_1, \dots, v_k]$ .
- f) Ein **Weg** ist eine Folge von (nicht notwendig verschiedenen) Knoten  $v_0, \dots, v_\ell$  mit  $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$  für  $i = 0, \dots, \ell - 1$ . Die **Länge** des Weges ist die Anzahl der durchlaufenen Kanten, also  $\ell$ . Im Fall  $\ell = 0$  heißt der Weg **trivial**. Ein Weg  $(v_0, \dots, v_\ell)$  heißt auch  **$v_0$ - $v_\ell$ -Weg**.
- g)  $G$  heißt **zusammenhängend**, falls es für alle Paare  $\{u, v\} \in \binom{V}{2}$  einen  $u$ - $v$ -Weg gibt.
- h) Die durch die Äquivalenzklassen  $V_i \subseteq V$  der Relation
- $$Z = \{(u, v) \in V \times V \mid \text{es gibt in } G \text{ einen } u\text{-}v\text{-Weg}\}$$
- induzierten Teilgraphen  $G[V_i]$  heißen **Zusammenhangskomponenten** (engl. connected components) oder einfach **Komponenten** von  $G$ .
- i) Ein  $u$ - $v$ -Weg heißt **einfach** oder  **$u$ - $v$ -Pfad**, falls alle durchlaufenen Knoten verschieden sind.
- j) Ein **Zyklus** ist ein  $u$ - $v$ -Weg mit  $u = v$ .
- k) Eine Menge von Pfaden heißt **disjunkt**, wenn je zwei Pfade in der Menge keine gemeinsamen Knoten haben, **kantendisjunkt**, wenn je zwei Pfade in der Menge keine gemeinsamen Kanten haben, und **knotendisjunkt**, wenn je zwei Pfade in der Menge höchstens gemeinsame Endpunkte haben.
- l) Ein **Kreis** ist ein Zyklus  $(v_1, \dots, v_\ell, v_1)$  der Länge  $\ell \geq 3$ , für den  $v_1, \dots, v_\ell$  paarweise verschieden sind.

- m) Ein Graph heißt **kreisfrei**, **azyklisch** oder **Wald**, falls er keinen Kreis enthält. Ein **Baum** ist ein zusammenhängender Wald.

**Definition 1.4.** Ein **gerichteter Graph** oder **Digraph** ist ein Paar  $G = (V, E)$ , wobei

$V$  - eine endliche Menge von **Knoten/Ecken** und  
 $E$  - die Menge der **Kanten** ist.

Hierbei gilt

$$E \subseteq V \times V = \{(u, v) \mid u, v \in V\},$$

wobei  $E$  auch Schlingen  $(u, u)$  enthalten kann. Sei  $v \in V$  ein Knoten.

- a) Die **Nachfolgermenge** von  $v$  ist  $N^+(v) = \{u \in V \mid (v, u) \in E\}$ .
- b) Die **Vorgängermenge** von  $v$  ist  $N^-(v) = \{u \in V \mid (u, v) \in E\}$ .
- c) Die **Nachbarmenge** von  $v$  ist  $N(v) = N^+(v) \cup N^-(v)$ .
- d) Der **Ausgangsgrad** von  $v$  ist  $\deg^+(v) = |N^+(v)|$  und der **Eingangsgrad** von  $v$  ist  $\deg^-(v) = |N^-(v)|$ . Der **Grad** von  $v$  ist  $\deg(v) = \deg^+(v) + \deg^-(v)$ .
- e) Ein (**gerichteter**)  **$v_0$ - $v_\ell$ -Weg** ist eine Folge von Knoten  $v_0, \dots, v_\ell$  mit  $(v_i, v_{i+1}) \in E$  für  $i = 0, \dots, \ell - 1$ .
- f) Ein (**gerichteter**) **Zyklus** ist ein gerichteter  $u$ - $v$ -Weg mit  $u = v$ .
- g) Ein gerichteter Weg heißt **einfach** oder (**gerichteter**) **Pfad**, falls alle durchlaufenen Knoten verschieden sind.
- h) Ein (**gerichteter**) **Kreis** in  $G$  ist ein gerichteter Zyklus  $(v_1, \dots, v_\ell, v_1)$  der Länge  $\ell \geq 1$ , für den  $v_1, \dots, v_\ell$  paarweise verschieden sind.
- i)  $G$  heißt **kreisfrei** oder **azyklisch**, wenn es in  $G$  keinen gerichteten Kreis gibt.
- j)  $G$  heißt **stark zusammenhängend**, wenn es in  $G$  für jedes Knotenpaar  $u \neq v \in V$  sowohl einen  $u$ - $v$ -Pfad als auch einen  $v$ - $u$ -Pfad gibt.
- k)  $G$  heißt **gerichteter Wald**, wenn  $G$  kreisfrei ist und jeder Knoten  $v \in V$  Eingangsgrad  $\deg^-(v) \leq 1$  hat.

## 2 Färben von Graphen

l) Ein Knoten  $w \in V$  vom Eingangsgrad  $\deg^-(w) = 0$  heißt **Wurzel** von  $G$ , und ein Knoten  $u \in V$  vom Ausgangsgrad  $\deg^+(u) = 0$  heißt **Blatt** von  $G$ .

Die **Adjazenzmatrix** eines Graphen bzw. Digraphen  $G = (V, E)$  mit (geordneter) Knotenmenge  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  ist die  $(n \times n)$ -Matrix  $A = (a_{ij})$  mit den Einträgen

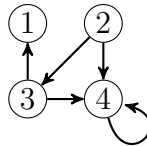
$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \{v_i, v_j\} \in E \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad a_{ij} = \begin{cases} 1, & (v_i, v_j) \in E \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für ungerichtete Graphen ist die Adjazenzmatrix symmetrisch mit  $a_{ii} = 0$  für  $i = 1, \dots, n$ .

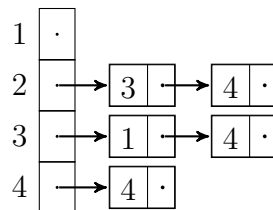
Bei der **Adjazenzlisten-Darstellung** wird für jeden Knoten  $v_i$  eine Liste mit seinen Nachbarn verwaltet. Im gerichteten Fall verwaltet man entweder nur die Liste der Nachfolger oder zusätzlich eine weitere für die Vorgänger. Falls die Anzahl der Knoten statisch ist, organisiert man die Adjazenzlisten in einem Feld, d.h. das Feldelement mit Index  $i$  verweist auf die Adjazenzliste von Knoten  $v_i$ . Falls sich die Anzahl der Knoten dynamisch ändert, so werden die Adjazenzlisten typischerweise ebenfalls in einer doppelt verketteten Liste verwaltet.

### Beispiel 1.5.

Betrachte den gerichteten Graphen  $G = (V, E)$  mit  $V = \{1, 2, 3, 4\}$  und  $E = \{(2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 4), (4, 4)\}$ . Dieser hat folgende Adjazenzmatrix- und Adjazenzlisten-Darstellung:



	1	2	3	4
1	0	0	0	0
2	0	0	1	1
3	1	0	0	1
4	0	0	0	1



◁

## 2 Färben von Graphen

**Definition 2.1.** Sei  $G = (V, E)$  ein Graph und sei  $k \in \mathbb{N}$ .

- Eine Abbildung  $f: V \rightarrow \mathbb{N}$  heißt **Färbung** von  $G$ , wenn  $f(u) \neq f(v)$  für alle  $\{u, v\} \in E$  gilt.
- $G$  heißt  **$k$ -färbbar**, falls eine Färbung  $f: V \rightarrow \{1, \dots, k\}$  existiert.
- Die **chromatische Zahl** ist

$$\chi(G) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid G \text{ ist } k\text{-färbbar}\}.$$

**Beispiel 2.2.**

$$\chi(E_n) = 1, \quad \chi(K_{n,m}) = 2, \quad \chi(K_n) = n,$$

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2, & n \text{ gerade} \\ 3, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ein wichtiges Entscheidungsproblem ist, ob ein gegebener Graph  $k$ -färbbar ist. Dieses Problem ist für jedes feste  $k \geq 3$  schwierig.

**$k$ -Färbbarkeit ( $k$ -COLORING):**

**Gegeben:** Ein Graph  $G$ .

**Gefragt:** Ist  $G$   $k$ -färbbar?

**Satz 2.3.**  $k$ -COLORING ist für  $k \geq 3$  NP-vollständig.

Das folgende Lemma setzt die chromatische Zahl  $\chi(G)$  in Beziehung zur Stabilitätszahl  $\alpha(G)$ .

**Lemma 2.4.**  $n/\alpha(G) \leq \chi(G) \leq n - \alpha(G) + 1$ .

*Beweis.* Sei  $G$  ein Graph und sei  $c$  eine  $\chi(G)$ -Färbung von  $G$ . Da dann die Mengen  $S_i = \{u \in V \mid c(u) = i\}$ ,  $i = 1, \dots, \chi(G)$ , stabil sind, folgt  $|S_i| \leq \alpha(G)$  und somit gilt

$$n = \sum_{i=1}^{\chi(G)} |S_i| \leq \chi(G)\alpha(G).$$

Für den Beweis von  $\chi(G) \leq n - \alpha(G) + 1$  sei  $S$  eine stabile Menge in  $G$  mit  $|S| = \alpha(G)$ . Dann ist  $G - S$   $k$ -färbbar für ein  $k \leq n - |S|$ . Da wir alle Knoten in  $S$  mit der Farbe  $k + 1$  färben können, folgt  $\chi(G) \leq k + 1 \leq n - \alpha(G) + 1$ . ■

Beide Abschätzungen sind scharf, können andererseits aber auch beliebig schlecht werden.

**Lemma 2.5.**  $\binom{\chi(G)}{2} \leq m$  und somit  $\chi(G) \leq 1/2 + \sqrt{2m + 1/4}$ .

*Beweis.* Zwischen je zwei Farbklassen einer optimalen Färbung muss es mindestens eine Kante geben. ■

Die chromatische Zahl steht auch in Beziehung zur Cliquenzahl  $\omega(G)$  und zum Maximalgrad  $\Delta(G)$ :

**Lemma 2.6.**  $\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ .

*Beweis.* Die erste Ungleichung folgt daraus, dass die Knoten einer maximal großen Clique unterschiedliche Farben erhalten müssen.

Um die zweite Ungleichung zu erhalten, betrachten wir folgenden Färbungsalgorithmus:

#### Algorithmus greedy-color

---

```

1  input ein Graph  $G = (V, E)$  mit  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ 
2   $c(v_1) := 1$ 
3  for  $i := 2$  to  $n$  do
4     $F_i := \{c(v_j) \mid j < i, v_j \in N(v_i)\}$ 
5     $c(v_i) := \min\{k \geq 1 \mid k \notin F_i\}$ 

```

---

Da für die Farbe  $c(v_i)$  von  $v_i$  nur  $|F_i| \leq \Delta(G)$  Farben verboten sind, gilt  $c(v_i) \leq \Delta(G) + 1$ . ■

## 2.1 Färben von planaren Graphen

Ein Graph  $G$  heißt **planar**, wenn er so in die Ebene einbettbar ist, dass sich zwei verschiedene Kanten höchstens in ihren Endpunkten berühren. Dabei werden die Knoten von  $G$  als Punkte und die Kanten von  $G$  als Verbindungslinien (genauer: Jordankurven) zwischen den zugehörigen Endpunkten dargestellt.

Bereits im 19. Jahrhundert wurde die Frage aufgeworfen, wie viele Farben höchstens benötigt werden, um eine Landkarte so zu färben, dass aneinander grenzende Länder unterschiedliche Farben erhalten. Offensichtlich lässt sich eine Landkarte in einen planaren Graphen transformieren, indem man für jedes Land einen Knoten zeichnet und benachbarte Länder durch eine Kante verbindet. Länder, die sich nur in einem Punkt berühren, gelten dabei nicht als benachbart.

Die Vermutung, dass 4 Farben ausreichen, wurde 1878 von Kempe „bewiesen“ und erst 1890 entdeckte Heawood einen Fehler in Kempes „Beweis“. Übrig blieb der *5-Farben-Satz*. Der *4-Farben-Satz* wurde erst 1976 von Appel und Haken bewiesen. Hierbei handelt es sich jedoch nicht um einen Beweis im klassischen Sinne, da zur Überprüfung der vielen auftretenden Spezialfälle Computer benötigt werden.

**Satz 2.7** (Appel, Haken 1976).

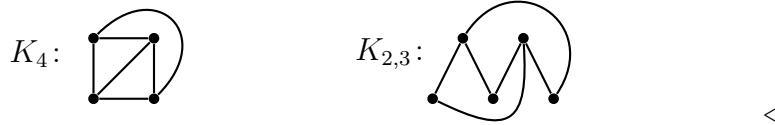
*Jeder planare Graph ist 4-färbbar.*

Aus dem Beweis des 4-Farben-Satzes von Appel und Haken lässt sich ein 4-Färbungsalgorithmus für planare Graphen mit einer Laufzeit von  $\mathcal{O}(n^4)$  gewinnen.

In 1997 fanden Robertson, Sanders, Seymour und Thomas einen einfacheren Beweis für den 4-Farben-Satz, welcher zwar einen deut-

lich schnelleren  $\mathcal{O}(n^2)$  Algorithmus liefert, aber ebenfalls nur mit Computer-Unterstützung verifizierbar ist.

**Beispiel 2.8.** *Wie die folgenden Einbettungen von  $K_4$  und  $K_{2,3}$  in die Ebene zeigen, sind  $K_4$  und  $K_{2,3}$  planar.*



Zur Beantwortung der Frage, ob auch  $K_5$  und  $K_{3,3}$  planar sind, betrachten wir die **Gebiete**, die bei der Einbettung von (zusammenhängenden) Graphen in die Ebene entstehen. Dabei gehören 2 Punkte zum selben Gebiet, falls es zwischen ihnen eine Verbindungslinie gibt, die keine Kante des eingebetteten Graphen kreuzt oder berührt. Nur eines dieser Gebiete ist unbeschränkt und dieses wird als **äußeres Gebiet** bezeichnet. Die Anzahl der Gebiete von  $G$  bezeichnen wir mit  $r(G)$  oder kurz mit  $r$ . Die begrenzenden Kanten eines Gebietes  $g$  bilden seinen **Rand**  $\text{rand}(g)$ . Ihre Anzahl bezeichnen wir mit  $d(g)$ , wobei Kanten  $\{u, v\}$ , an die  $g$  von beiden Seiten grenzt, doppelt gezählt werden.

Der **Rand**  $\text{rand}(g)$  eines Gebietes  $g$  ist die (zirkuläre) Folge aller Kanten, die an  $g$  grenzen, wobei man jede Kante so durchläuft, dass  $g$  „in Fahrtrichtung links“ liegt bzw. jeden Knoten  $u$ , den man über eine Kante  $e$  erreicht, über die im Uhrzeigersinn nächste Kante  $e'$  wieder verlässt. Auf diese Weise erhält jede Kante auf dem Rand von  $g$  eine Richtung (oder Orientierung).

Da jede Kante zur Gesamtlänge  $\sum_g d(g)$  aller Ränder den Wert 2 beiträgt (sie wird genau einmal in jeder Richtung durchlaufen), folgt

$$\sum_g d(g) = 2m(G).$$

Wir nennen das Tripel  $G' = (V, E, R)$  eine **ebene Realisierung** des Graphen  $G = (V, E)$ , falls es eine Einbettung von  $G$  in die Ebene

gibt, deren Gebiete die Ränder in  $R$  haben. In diesem Fall nennen wir  $G' = (V, E, R)$  auch einen **ebenen Graphen**. Ist  $G$  nicht zusammenhängend, so betten wir die Komponenten von  $G$  in die Ebene ein und fassen alle Ränder, die bei diesen Einbettungen entstehen, zu einer Randmenge  $R$  zusammen.

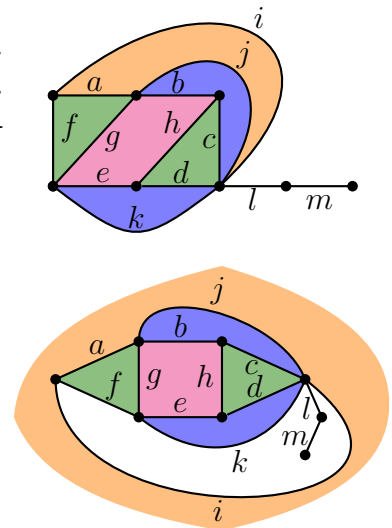
Führen zwei Einbettungen von  $G$  in die Ebene auf dieselbe Randmenge  $R$ , so werden sie als **äquivalent** angesehen. Eine andere Möglichkeit, Einbettungen bis auf Äquivalenz kombinatorisch zu beschreiben, besteht darin, für jeden Knoten  $u$  die (zirkuläre) Ordnung  $\pi_u$  aller mit  $u$  inzidenten Kanten anzugeben. Man nennt  $\pi = \{\pi_u \mid u \in V\}$  ein **Rotationssystem** für  $G$ , falls es eine entsprechende Einbettung gibt. Rotationssysteme haben den Vorteil, dass sie bei Verwendung der Adjazenzlistendarstellung ohne zusätzlichen Platzaufwand gespeichert werden können, indem man die zu  $u$  adjazenten Knoten gemäß  $\pi_u$  anordnet.

**Beispiel 2.9.** *Die beiden nebenstehenden Einbettungen eines Graphen  $G = (V, E)$  in die Ebene haben jeweils 7 Gebiete und führen beide auf den ebenen Graphen  $G' = (V, E, R)$  mit den 7 Rändern*

$$R = \{(a, f, g), (a, j, i), (b, g, e, h), (b, c, j), (c, h, d), (d, e, k), (f, i, l, m, m, l, k)\}.$$

Das zugehörige Rotationssystem ist

$$\pi = \{(a, f, i), (a, j, b, g), (b, c, h), (e, k, f, g), (d, e, h), (c, j, i, l, k, d), (l, m), (m)\}.$$



Man beachte, dass sowohl in  $R$  als auch in  $\pi$  jede Kante genau zweimal vorkommt. Anstelle von (zirkulären) Kantenfolgen kann man die Elemente von  $R$  und  $\pi$  natürlich auch durch entsprechende Knotenfolgen beschreiben.

**Satz 2.10** (Polyederformel von Euler, 1750).

Für einen zusammenhängenden ebenen Graphen  $G = (V, E, R)$  gilt

$$n(G) - m(G) + r(G) = 2. \quad (*)$$

*Beweis.* Wir führen den Beweis durch Induktion über die Kantenzahl  $m(G) = m$ .

$m = 0$ : Da  $G$  zusammenhängend ist, muss dann  $n = 1$  sein.

Somit ist auch  $r = 1$ , also  $(*)$  erfüllt.

$m - 1 \rightsquigarrow m$ : Sei  $G$  ein zusammenhängender ebener Graph mit  $m$  Kanten.

Ist  $G$  ein Baum, so entfernen wir ein Blatt und erhalten einen zusammenhängenden ebenen Graphen  $G'$  mit  $n' = n - 1$  Knoten,  $m' = m - 1$  Kanten und  $r' = r$  Gebieten. Nach IV folgt  $n - m + r = (n - 1) - (m - 1) + r = n' - m' + r' = 2$ .

Falls  $G$  kein Baum ist, entfernen wir eine Kante auf einem Kreis in  $G$  und erhalten einen zusammenhängenden ebenen Graphen  $G'$  mit  $n' = n$  Knoten,  $m' = m - 1$  Kanten und  $r' = r - 1$  Gebieten. Nach IV folgt  $n - m + r = n - (m - 1) + (r - 1) = n' - m' + r' = 2$ . ■

**Korollar 2.11.** Sei  $G = (V, E)$  ein planarer Graph mit  $n \geq 3$  Knoten. Dann ist  $m \leq 3n - 6$ . Falls  $G$  dreiecksfrei ist, gilt sogar  $m \leq 2n - 4$ .

*Beweis.* O.B.d.A. sei  $G$  zusammenhängend. Wir betrachten eine beliebige planare Einbettung von  $G$ . Da  $n \geq 3$  ist, ist jedes Gebiet  $g$  von  $d(g) \geq 3$  Kanten umgeben. Daher ist  $2m = i = \sum_g d(g) \geq 3r$  bzw.  $r \leq 2m/3$ . Eulers Formel liefert

$$m = n + r - 2 \leq n + 2m/3 - 2,$$

was  $(1 - 2/3)m \leq n - 2$  und somit  $m \leq 3n - 6$  impliziert.

Wenn  $G$  dreiecksfrei ist, ist jedes Gebiet von  $d(g) \geq 4$  Kanten umgeben. Daher ist  $2m = i = \sum_g d(g) \geq 4r$  bzw.  $r \leq m/2$ . Eulers Formel

liefert daher  $m = n + r - 2 \leq n + m/2 - 2$ , was  $m/2 \leq n - 2$  und somit  $m \leq 2n - 4$  impliziert. ■

**Korollar 2.12.** Die Graphen  $K_5$  und  $K_{3,3}$  sind nicht planar.

*Beweis.* Wegen  $n(K_5) = 5$ , also  $3n(K_5) - 6 = 9$ , und wegen  $m(K_5) = \binom{5}{2} = 10$  gilt  $m(K_5) \not\leq 3n(K_5) - 6$ .

Wegen  $n(K_{3,3}) = 6$ , also  $2n(K_{3,3}) - 4 = 8$ , und wegen  $m(K_{3,3}) = 3 \cdot 3 = 9$  gilt  $m(K_{3,3}) \not\leq 2n(K_{3,3}) - 4$ . ■

Als weitere interessante Folgerung aus der Polyederformel können wir zeigen, dass jeder planare Graph einen Knoten  $v$  vom Grad  $\deg(v) \leq 5$  hat.

**Korollar 2.13.** Jeder planare Graph hat einen Minimalgrad  $\delta \leq 5$ .

*Beweis.* Für  $n \leq 6$  ist die Behauptung klar. Für  $n > 6$  impliziert die Annahme  $\delta \geq 6$  die Ungleichung

$$m = \frac{1}{2} \sum_{u \in V} \deg(u) \geq \frac{1}{2} \sum_{u \in V} 6 = 3n,$$

was im Widerspruch zu  $m \leq 3n - 6$  steht. ■

**Definition 2.14.** Seien  $G = (V, E)$  und  $H$  Graphen und seien  $u, v \in V$ .

- Durch **Fusion** von  $u$  und  $v$  entsteht aus  $G$  der Graph  $G_{uv} = (V - \{v\}, E')$  mit

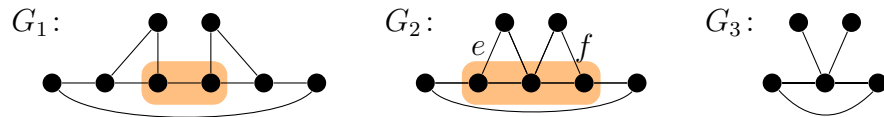
$$E' = \{e \in E \mid v \notin e\} \cup \{\{u, v'\} \mid \{v, v'\} \in E - \{u, v\}\}.$$

- Ist  $e = \{u, v\}$  eine Kante von  $G$  (also  $e \in E$ ), so sagen wir auch,  $G_{uv}$  entsteht aus  $G$  durch **Kontraktion** der Kante  $e$ .
- Hat zudem  $v$  den Grad 2 mit  $N_G(v) = \{u, w\}$ , so sagen wir auch,  $G_{uv}$  entsteht aus  $G$  durch **Überbrückung** des Knotens  $v$  bzw.  $G$  aus  $G_{uv}$  durch **Unterteilung** der Kante  $\{u, w\}$ .



- $G$  heißt zu  $H$  **kontrahierbar**, falls  $H$  aus einer isomorphen Kopie von  $G$  durch wiederholte Kontraktionen gewonnen werden kann. In diesem Fall nennen wir  $H$  auch eine **Kontraktion** von  $G$  bzw.  $G$  eine **Expansion** von  $H$ .
- $H$  heißt zu  $G$  **unterteilbar**, falls  $G$  aus einer isomorphen Kopie von  $H$  durch wiederholte Unterteilungen von Kanten gewonnen werden kann. In diesem Fall nennen wir  $G$  auch eine **Unterteilung** von  $H$  bzw.  $H$  eine **Überbrückung** von  $G$ .
- $H$  heißt **Minor** von  $G$ , wenn ein Teilgraph von  $G$  zu  $H$  kontrahierbar ist.  $H$  heißt **topologischer Minor** von  $G$ , wenn ein Teilgraph von  $G$  eine Unterteilung von  $H$  ist.
- $G$  heißt  **$H$ -frei**, falls  $H$  kein Minor von  $G$  ist. Für eine Menge  $\mathcal{H}$  von Graphen heißt  $G$   **$\mathcal{H}$ -frei**, falls kein  $H \in \mathcal{H}$  ein Minor von  $G$  ist.

**Beispiel 2.15.** Betrachte folgende Graphen:



- $G_2$  ist ein Minor von  $G_1$ , da  $G_2$  durch Kontraktion der in  $G_1$  umrandeten Kante entsteht; entsprechend ist  $G_3$  ein Minor von  $G_2$  und auch von  $G_1$ .
- $G_2$  ist keine Unterteilung von  $G_3$ , da  $G_2$  im Gegensatz zu  $G_3$  Knoten vom Grad 3 hat. Falls wir jedoch die beiden Kanten  $e$  und  $f$  aus  $G_2$  entfernen, so ist der resultierende Teilgraph  $G'_2$  eine Unterteilung von  $G_3$ . Somit ist  $G_3$  ein topologischer Minor von  $G_2$ .
- $G_2$  und  $G_3$  sind aber keine topologischen Minoren von  $G_1$ , da  $G_2$  und  $G_3$  einen Knoten vom Grad 4 haben, aber  $G_1$  nur Knoten vom Grad  $\leq 3$ . ◁

Es ist klar, dass die Klasse  $\mathcal{K}$  der planaren Graphen zwar unter Subgraphbildung, Kontraktion, Unterteilung und Überbrückung abge-

schlossen ist, aber nicht unter Fusion. Folglich ist jeder (topologische) Minor und jede Unterteilung eines planaren Graphen ebenfalls planar. Nach Definition lässt sich jeder (topologische) Minor  $H$  von  $G$  aus einem zu  $G$  isomorphen Graphen durch wiederholte Anwendung folgender Operationen gewinnen:

- Entfernen einer Kante oder eines Knotens,
- Kontraktion einer Kante (bzw. Überbrückung eines Knotens).

Da die Kontraktionen (bzw. Überbrückungen) o.B.d.A. auch zuletzt ausgeführt werden können, gilt hiervon auch die Umkehrung. Zudem ist leicht zu sehen, dass zwei Graphen  $G$  und  $H$  genau dann (topologische) Minoren voneinander sind, wenn sie isomorph sind.

**Satz 2.16** (Kempe 1878, Heawood 1890).  
*Jeder planare Graph ist 5-färbbar.*

*Beweis.* Wir beweisen den Satz durch Induktion über  $n$ .

$n = 1$ : Klar.

$n - 1 \rightsquigarrow n$ : Sei  $G$  ein planarer Graph mit  $n(G) = n$  Knoten. Da  $G$  planar ist, existiert ein Knoten  $u$  mit  $\deg(u) \leq 5$ . Nun konstruieren wir zu  $G$  wie folgt einen Minor  $G'$ :

- Im Fall  $\deg(u) \leq 4$  sei  $G' = G - u$ , d.h. wir entfernen  $u$  aus  $G$ .
- Andernfalls hat  $u$  zwei Nachbarn  $v$  und  $w$ , die nicht durch eine Kante verbunden sind (andernfalls wäre  $K_5$  ein Teilgraph von  $G$ ). In diesem Fall sei  $G' = (G_{vu})_{vw}$ , d.h. wir kontrahieren die beiden Kanten  $\{u, v\}$  und  $\{u, w\}$  zum Knoten  $v$ .

Da  $G'$  ein Minor von  $G$  ist, ist  $G'$  planar. Da  $G'$  zudem höchstens  $n - 1$  Knoten hat, hat  $G'$  nach IV eine 5-Färbung  $c'$ . Wir erweitern  $c'$  wie folgt zu einer 5-Färbung  $c$  von  $G$ :

- Im 2. Fall geben wir dem Knoten  $w$  die Farbe  $c(w) = c'(v)$ .
- Da nun in beiden Fällen die Nachbarn von  $u$  in  $G$  höchstens 4 verschiedene Farben haben, können wir auch  $u$  eine Farbe  $c(u) \leq 5$  geben. ■

Kuratowski konnte 1930 beweisen, dass jeder nichtplanare Graph  $G$  den  $K_{3,3}$  oder den  $K_5$  als topologischen Minor enthält. Für den Beweis benötigen wir noch folgende Notationen.

**Definition 2.17.** Sei  $G = (V, E)$  ein Graph und  $S \subseteq V$ .

- Die Menge  $S$  heißt **Separator** in  $G$ , wenn es zwei Knoten  $u, v \in V \setminus S$  gibt, zwischen denen in  $G - S$  kein  $u$ - $v$ -Weg existiert. Ist  $|S| = k$ , so nennen wir  $S$  auch einen  **$k$ -Separator** zwischen  $u$  und  $v$  oder auch einen  **$u$ - $v$ -Separator** der Größe  $k$ . Ein 1-Separator wird auch **Artikulation** oder **Schnittknoten** von  $G$  genannt.
- Ein Graph  $G$  heißt  **$k$ -zusammenhängend**,  $0 \leq k \leq n - 1$ , falls  $G$  keinen  $(k - 1)$ -Separator hat. Die größte Zahl  $k$ , für die  $G$   $k$ -zusammenhängend ist, heißt die **Zusammenhangszahl** von  $G$  und wird mit  $\kappa(G)$  bezeichnet.

Ein Graph  $G$  mit  $n \geq 2$  Knoten ist also genau dann zusammenhängend, wenn  $\kappa(G) \geq 1$  ist.

**Lemma 2.18.** Ist ein Graph  $G = (V, E)$  nicht planar, so hat er einen

- 2-zusammenhängenden Untergraphen  $U = (V', E')$  und einen
- 3-zusammenhängenden topologischen Minor  $M = (V'', E'')$ ,

die **minimal nicht planar** sind, d.h.  $U$  und  $M$  sind nicht planar und für alle  $e' \in E'$  und  $e'' \in E''$  sind die Graphen  $U - e'$  und  $M - e''$  planar.

*Beweis.* Wir entfernen zuerst solange Kanten und Knoten aus  $G$ , bis wir aus dem verbliebenen Teilgraphen  $U = (V', E')$  keine weiteren Kanten oder Knoten entfernen können, ohne dass  $U$  planar wird.

$U$  ist zusammenhängend, da andernfalls mindestens eine Komponente von  $U$  nicht planar ist und wir alle übrigen Komponenten entfernen könnten, ohne dass  $U$  planar wird.

$U$  ist sogar 2-zusammenhängend, da  $U$  sonst einen Schnittknoten  $s$  enthält und  $U - s$  in  $k \geq 2$  Komponenten  $U[V_1], \dots, U[V_k]$  zerfällt.

Dann ist aber mindestens ein Teilgraph  $T_i = U[V_i \cup \{s\}]$  nicht planar und wir können alle Knoten außerhalb von  $T_i$  entfernen, ohne dass  $U$  planar wird.

Um einen topologischen Minor  $M$  von  $G$  mit den behaupteten Eigenschaften zu erhalten, konstruieren wir zu  $U$  einen topologischen Minor  $U'$ , der minimal nicht planar ist und zudem 3-zusammenhängend ist oder weniger Knoten als  $U$  hat. Indem wir diese Konstruktion wiederholen, erhalten wir schließlich  $M$ .

Falls  $U$  3-zusammenhängend ist, ist  $U' = U$ . Andernfalls gibt es in  $U$  einen 2-Separator  $S = \{u, v\}$ , d.h.  $U - S$  zerfällt in  $k \geq 2$  Komponenten  $U[V_1], \dots, U[V_k]$ . Betrachte die (2-zusammenhängenden) Graphen  $G_i = U[V_i \cup \{u, v\}] \cup \{u, v\}$ . Dann ist mindestens ein  $G_i$  nicht planar (z.B.  $G_1$ ), da sonst auch  $U$  planar wäre. Da  $k \geq 2$  ist, erhalten wir einen zu  $G_1$  isomorphen Graphen  $U'$  als topologischen Minor von  $H = U[V_1 \cup V_2 \cup \{u, v\}]$  (und damit von  $U$ ), indem wir in  $U[V_2 \cup \{u, v\}]$  einen beliebigen  $u$ - $v$ -Pfad  $P$  wählen und aus  $H$  alle Knoten und Kanten entfernen, die nicht auf  $P$  liegen und danach  $P$  überbrücken. Dann hat  $U'$  weniger Knoten als  $U$  und ist wie  $U$  minimal nicht planar. ■

**Definition 2.19.** Sei  $G$  ein Graph und sei  $K$  ein Kreis in  $G$ . Ein Teilgraph  $B$  von  $G$  heißt **Brücke** von  $K$  in  $G$ , falls

- $B$  nur aus einer Kante besteht, die zwei Knoten von  $K$  verbindet, aber nicht auf  $K$  liegt (solche Brücken werden auch als **Sehnen** von  $K$  bezeichnet), oder
- $B - K$  eine Komponente von  $G - K$  ist und  $B$  aus  $B - K$  durch Hinzufügen aller Kanten zwischen  $B - K$  und  $K$  (und der zugehörigen Endpunkte auf  $K$ ) entsteht.

Die Knoten von  $B$ , die auf  $K$  liegen, heißen **Kontaktpunkte** von  $B$ . Zwei Brücken  $B$  und  $B'$  von  $K$  heißen **inkompatibel**, falls

- $B$  Kontaktpunkte  $u, v$  und  $B'$  Kontaktpunkte  $u', v'$  hat, so dass diese vier Punkte in der Reihenfolge  $u, u', v, v'$  auf  $K$  liegen, oder

- $B$  und  $B'$  mindestens 3 gemeinsame Kontaktpunkte haben.

Es ist leicht zu sehen, dass in einem planaren Graphen kein Kreis mehr als zwei inkompatible Brücken haben kann.

**Satz 2.20** (Kuratowski 1930).

Für einen Graphen  $G$  sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i)  $G$  ist planar.
- (ii)  $G$  enthält weder den  $K_{3,3}$  noch den  $K_5$  als topologischen Minor.

*Beweis.* Die Implikation von  $i)$  nach  $ii)$  folgt aus der Abgeschlossenheit der planaren Graphen unter (topologischer) Minorenbildung.

Die Implikation von  $ii)$  nach  $i)$  zeigen wir durch Kontraposition. Sei also  $G = (V, E)$  nicht planar. Dann hat  $G$  nach Lemma 2.18 einen 3-zusammenhängenden nicht planaren topologischen Minor  $M = (V', E')$ , so dass  $M - e'$  für jede Kante  $e' \in E'$  planar ist. Wir entfernen eine beliebige Kante  $e_0 = \{a_0, b_0\}$  aus  $M$ . Dann ist  $M - e_0$  planar. Da  $M - e_0$  2-zusammenhängend ist, gibt es in  $M - e_0$  einen Kreis  $K$  durch die beiden Knoten  $a_0$  und  $b_0$  (siehe Übungen). Wir wählen  $K$  zusammen mit einer ebenen Realisierung  $H'$  von  $M - e_0$  so, dass  $K$  möglichst viele Gebiete in  $H'$  einschließt.

Für zwei Knoten  $a, b$  auf  $K$  bezeichnen wir mit  $K[a, b]$  die Menge aller Knoten, die auf dem Bogen von  $a$  nach  $b$  (im Uhrzeigersinn) auf  $K$  liegen. Zudem sei  $K[a, b) = K[a, b] \setminus \{b\}$ . Die Mengen  $K(a, b)$  und  $K(a, b]$  sind analog definiert.

Die Kanten jeder Brücke  $B$  von  $K$  in  $M - e_0$  verlaufen in  $H'$  entweder alle innerhalb oder alle außerhalb von  $K$ . Im ersten Fall nennen wir  $B$  eine **innere Brücke** und im zweiten eine **äußere Brücke**.

Es ist klar, dass  $K$  in  $H'$  mindestens eine innere und mindestens eine äußere Brücke haben muss (sonst könnten wir  $e'$  zu  $H'$  hinzufügen). Zudem muss jede äußere Brücke  $B$  genau zwei Kontaktpunkte haben: einen Knoten  $u \in K(a_0, b_0)$  und einen Knoten  $v \in K(b_0, a_0)$ . Andernfalls hätte  $B$  nämlich mindestens 2 Kontaktpunkte auf  $K[a_0, b_0]$  oder

auf  $K[b_0, a_0]$ . Daher könnte  $K$  zu einem Kreis  $K'$  erweitert werden, der in  $H'$  mehr Gebiete einschließt (bzw. ausschließt) als  $K$ , was der Wahl von  $K$  und  $H'$  widerspricht. Da  $M$  3-zusammenhängend ist, muss  $B$  zudem eine Sehne  $\{u, v\}$  sein.

$K$  hat in  $M$  außer den Brücken in  $M - e_0$  noch zusätzlich die Brücke  $e_0$ . Wir wählen nun eine innere Brücke  $B$ , die sowohl zu  $e_0$  als auch zu mindestens einer äußeren Brücke  $e_1 = \{a_1, b_1\}$  inkompatibel ist. Eine solche Brücke muss es geben, da wir sonst alle mit  $e_0$  inkompatiblen inneren Brücken nach außen klappen und  $e_0$  als innere Brücke hinzunehmen könnten, ohne die Planarität zu verletzen.

Wir benutzen  $K$  und die drei Brücken  $e_0$ ,  $e_1$  und  $B$ , um eine Unterteilung des  $K_{3,3}$  oder des  $K_5$  in  $M$  zu finden. Hierzu geben wir entweder zwei disjunkte Mengen  $A_1, A_2 \subseteq V'$  mit jeweils 3 Knoten an, so dass 9 knotendisjunkte Pfade zwischen allen Knoten  $a \in A_1$  und  $b \in A_2$  existieren. Oder wir geben eine Menge  $A \subseteq V'$  mit fünf Knoten an, so dass 10 knotendisjunkte Pfade zwischen je zwei Knoten  $a, b \in A$  existieren. Da  $e_0$  und  $e_1$  inkompatibel sind, können wir annehmen, dass die vier Knoten  $a_0, a_1, b_0, b_1$  in dieser Reihenfolge auf  $K$  liegen.

**Fall 1:**  $B$  hat einen Kontaktpunkt  $k_1 \notin \{a_0, a_1, b_0, b_1\}$ . Aus Symmetriegründen können wir  $k_1 \in K(a_0, a_1)$  annehmen. Da  $B$  weder zu  $e_0$  noch zu  $e_1$  kompatibel ist, hat  $B$  weitere Kontaktpunkte  $k_2 \in K(b_0, a_0)$  und  $k_3 \in K(a_1, b_1)$ , wobei  $k_2 = k_3$  sein kann.

**Fall 1a:** Ein Knoten  $k_i \in \{k_2, k_3\}$  liegt auf dem Bogen  $K(b_0, b_1)$ . In diesem Fall existieren 9 knotendisjunkte Pfade zwischen  $\{a_0, a_1, k_i\}$  und  $\{b_0, b_1, k_1\}$ .

**Fall 1b:**  $K(b_0, b_1) \cap \{k_2, k_3\} = \emptyset$ . In diesem Fall ist  $k_2 \in K[b_1, a_0]$  und  $k_3 \in K(a_1, b_0]$ . Dann gibt es in  $B$  einen Knoten  $u$ , von dem aus 3 knotendisjunkte Pfade zu  $\{k_1, k_2, k_3\}$  existieren. Folglich gibt es 9 knotendisjunkte Pfade zwischen  $\{a_0, a_1, u\}$  und  $\{k_1, k_2, k_3\}$ .

**Fall 2:** Alle Kontaktpunkte von  $B$  liegen in der Menge  $\{a_0, a_1, b_0, b_1\}$ . Da  $B$  inkompatibel zu  $e_0$  und  $e_1$  ist, müssen in diesem Fall alle vier

Punkte zu  $B$  gehören. Sei  $P_0$  ein  $a_0$ - $b_0$ -Pfad in  $B$  und sei  $P_1$  ein  $a_1$ - $b_1$ -Pfad in  $B$ . Sei  $u$  der erste Knoten auf  $P_0$ , der auch auf  $P_1$  liegt und sei  $v$  der letzte solche Knoten.

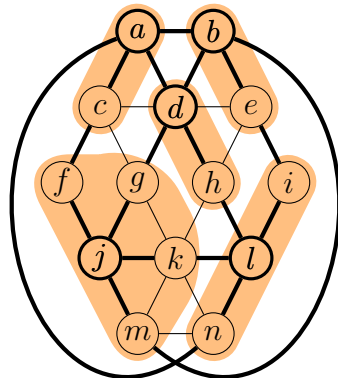
**Fall 2a:**  $u = v$ . Dann gibt es in  $B$  vier knotendisjunkte Pfade von  $u$  zu  $\{a_0, a_1, b_0, b_1\}$  und somit existieren in  $M$  10 knotendisjunkte Pfade zwischen den Knoten  $u, a_0, a_1, b_0, b_1$ .

**Fall 2b:**  $u \neq v$ . Durch  $u$  und  $v$  wird der Pfad  $P_1$  in drei Teilpfade  $P_{xu}, P_{uv}$  und  $P_{vy}$  unterteilt, wobei die Indizes die Endpunkte bezeichnen und  $\{x, y\} = \{a_1, b_1\}$  ist.

Somit gibt es in  $B$  drei Pfade zwischen  $u$  und jedem Knoten in  $\{a_0, v, x\}$  und zwei Pfade zwischen  $v$  und jedem Knoten in  $\{b_0, y\}$ , die alle 5 knotendisjunkt sind. Folglich gibt es in  $M$  9 knotendisjunkte Pfade zwischen  $\{a_0, v, x\}$  und  $\{b_0, y, u\}$ . ■

**Beispiel 2.21.** Der nebenstehende Graph ist nicht planar, da wir den  $K_5$  durch Kontraktion der farblich unterlegten Teilgraphen als Minor von  $G$  erhalten.

Alternativ lässt sich der  $K_5$  auch als ein topologischer Minor von  $G$  erhalten, indem wir die dünnen Kanten entfernen und in dem resultierenden Teilgraphen alle Knoten vom Grad 2 überbrücken. ◁



Eine unmittelbare Folgerung aus dem Satz von Kuratowski ist folgende Charakterisierung der Klasse der planaren Graphen.

**Korollar 2.22** (Wagner 1937). Ein Graph ist genau dann planar, wenn er  $\{K_{3,3}, K_5\}$ -frei ist.

**Satz 2.23** (Satz von Robertson und Seymour, 1983-2004). Sei  $\mathcal{K}$  eine Graphklasse, die unter Minorenbildung abgeschlossen ist. Dann gibt

es eine endliche Menge  $\mathcal{H}$  von Graphen mit

$$\mathcal{K} = \{G \mid G \text{ ist } \mathcal{H}\text{-frei}\}.$$

Die Graphen in  $\mathcal{H}$  sind bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt und heißen **verbotene Minoren** für die Klasse  $\mathcal{K}$ .

Eine interessante Folgerung aus diesem Satz ist, dass jede unendliche Graphklasse zwei Graphen  $G$  und  $H$  enthält, so dass  $H$  ein Minor von  $G$  ist. Das Problem, für zwei gegebene Graphen  $G$  und  $H$  zu entscheiden, ob  $H$  ein Minor von  $G$  ist, ist zwar NP-vollständig (da sich das Hamiltonkreisproblem darauf reduzieren lässt). Für einen festen Graphen  $H$  ist das Problem dagegen effizient entscheidbar.

**Satz 2.24** (Robertson und Seymour, 1995). Für jeden Graphen  $H$  gibt es einen  $O(n^3)$ -zeitbeschränkten Algorithmus, der für einen gegebenen Graphen  $G$  entscheidet, ob er  $H$ -frei ist.

**Korollar 2.25.** Die Zugehörigkeit zu jeder unter Minorenbildung abgeschlossenen Graphklasse  $\mathcal{K}$  ist in  $\mathbb{P}$  entscheidbar.

Der Entscheidungsalgorithmus für  $\mathcal{K}$  lässt sich allerdings nur angeben, wenn wir die verbotenen Minoren für  $\mathcal{K}$  kennen. Leider ist der Beweis von Satz 2.23 in dieser Hinsicht nicht konstruktiv, so dass der Nachweis, dass  $\mathcal{K}$  unter Minorenbildung abgeschlossen ist, nicht automatisch zu einem effizienten Erkennungsalgorithmus für  $\mathcal{K}$  führt.

## 2.2 Färben von chordalen Graphen

Chordale Graphen treten in vielen Anwendungen auf, z.B. sind alle Intervall- und alle Splitgraphen chordal. Wir werden sehen, dass sich für chordale Graphen effizient eine optimale Knotenfärbung berechnen lässt.

**Definition 2.26.** Ein Graph  $G = (V, E)$  heißt **chordal** oder **trianguliert**, wenn jeder Kreis  $K = (u_1, \dots, u_l, u_1)$  der Länge  $l \geq 4$  in  $G$  mindestens eine Sehne hat.

$G$  ist also genau dann chordal, wenn er keinen induzierten Kreis der Länge  $l \geq 4$  enthält (ein induzierter Kreis ist ein induzierter Teilgraph  $G[V']$ ,  $V' \subseteq V$ , der ein Kreis ist). Dies zeigt, dass die Klasse der chordalen Graphen unter induzierter Teilgraphbildung abgeschlossen ist (aber nicht unter Teilgraphbildung). Jede solche Graphklasse  $\mathcal{G}$  ist durch eine Familie von minimalen **verbotenen induzierten Teilgraphen**  $H_i$  charakterisiert, die bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt sind. Die Graphen  $H_i$  gehören also nicht zu  $\mathcal{G}$ , aber sobald wir einen Knoten daraus entfernen, erhalten wir einen Graphen in  $\mathcal{G}$ . Die Klasse der chordalen Graphen hat die Familie der Kreise  $C_n$  der Länge  $n \geq 4$  als verbotene induzierte Teilgraphen.

**Lemma 2.27.** *Für einen Graphen  $G$  sind folgende Aussagen äquivalent.*

- (i)  $G$  ist chordal.
- (ii) Jeder inklusionsminimale  $x$ - $y$ -Separator  $S$  in  $G$  ist eine Clique.
- (iii) Jedes Paar von nicht adjazenten Knoten  $x$  und  $y$  in  $G$  hat einen  $x$ - $y$ -Separator  $S$ , der eine Clique ist.

*Beweis.* Um zu zeigen, dass die zweite Aussage aus der ersten folgt, nehmen wir an, dass  $G$  einen minimalen  $x$ - $y$ -Separator  $S$  hat (d.h.  $S \setminus \{s\}$  ist für jedes  $s \in S$  kein  $x$ - $y$ -Separator), der zwei nicht adjazente Knoten  $u$  und  $v$  enthält. Seien  $G[V_1]$  und  $G[V_2]$  die beiden Komponenten in  $G - S$  mit  $x \in V_1$  und  $y \in V_2$ . Da  $S$  minimal ist, haben die beiden Knoten  $u$  und  $v$  sowohl einen Nachbarn in  $V_1$  als auch in  $V_2$ . Betrachte die beiden Teilgraphen  $G_i = G[V_i \cup \{u, v\}]$  ( $i = 1, 2$ ) und wähle jeweils einen kürzesten  $u$ - $v$ -Pfad  $P_i$  in  $G_i$ . Da deren Länge  $\geq 2$  ist, ist  $K = P_1 \cup P_2$  ein Kreis der Länge  $\geq 4$ . Aufgrund der Konstruktion ist zudem klar, dass  $K$  keine Sehnen in  $G$  hat.

Dass die zweite Aussage die dritte impliziert, ist klar, da jedes Paar von nicht adjazenten Knoten  $x$  und  $y$  einen  $x$ - $y$ -Separator  $S$  hat, und  $S$  eine Clique sein muss, wenn wir  $S$  inklusionsminimal wählen.

Um zu zeigen, dass die erste Aussage aus der dritten folgt, nehmen wir

an, dass  $G$  nicht chordal ist. Dann gibt es in  $G$  einen induzierten Kreis  $K$  der Länge  $\geq 4$ . Seien  $x$  und  $y$  zwei beliebige nicht adjazente Knoten auf  $K$  und sei  $S$  ein  $x$ - $y$ -Separator in  $G$ . Dann muss  $S$  mindestens zwei nicht adjazente Knoten aus  $K$  enthalten. ■

**Definition 2.28.** *Sei  $G = (V, E)$  ein Graph und sei  $k \geq 0$ . Ein Knoten  $u \in V$  vom Grad  $k$  heißt  **$k$ -simplizial**, wenn alle Nachbarn von  $u$  paarweise adjazent sind. Jeder  $k$ -simpliziale Knoten wird auch als **simplizial** bezeichnet.*

Zusammenhängende chordale Graphen können als eine Verallgemeinerung von Bäumen aufgefasst werden. Ein Graph  $G$  ist ein Baum, wenn er aus  $K_1$  durch sukzessives Hinzufügen von 1-simplizialen Knoten erzeugt werden kann. Entsprechend heißt  $G$   **$k$ -Baum**, wenn  $G$  aus  $K_k$  durch sukzessives Hinzufügen von  $k$ -simplizialen Knoten erzeugt werden kann. Wir werden sehen, dass ein zusammenhängender Graph  $G$  genau dann chordal ist, wenn er aus einem isolierten Knoten (also aus einer 1-Clique) durch sukzessives Hinzufügen von simplizialen Knoten erzeugt werden kann. Äquivalent hierzu ist, dass  $G$  durch sukzessives Entfernen von simplizialen Knoten auf einen isolierten Knoten reduziert werden kann.

**Definition 2.29.** *Sei  $G = (V, E)$  ein Graph. Eine lineare Ordnung  $(u_1, \dots, u_n)$  auf  $V$  heißt **perfekte Eliminationsordnung (PEO)** von  $G$ , wenn  $u_i$  simplizial in  $G[u_1, \dots, u_i]$  für  $i = 2, \dots, n$  ist.*

Wir eliminieren die Knoten von  $G$  also in der Reihenfolge  $u_n, \dots, u_2, u_1$ . Es ist klar dass der  $K_n$  alle  $n!$  lineare Ordnungen auf  $V$  als PEO hat. Das folgende Lemma verallgemeinert die bekannte Tatsache, dass jeder nicht vollständige Baum  $T$  (also  $T \notin \{K_1, K_2\}$ ) mindestens zwei nicht adjazente Blätter hat.

**Lemma 2.30.** *Jeder nicht vollständige chordale Graph  $G$  besitzt mindestens zwei simpliziale Knoten, die nicht adjazent sind.*

*Beweis.* Wir führen Induktion über  $n$ . Für  $n \leq 2$  ist die Behauptung klar. Sei  $G = (V, E)$  ein Graph mit  $n \geq 3$  Knoten. Da  $G$  nicht vollständig ist, enthält  $G$  zwei nichtadjazente Knoten  $x_1$  und  $x_2$ . Sei  $S$  ein minimaler  $x_1$ - $x_2$ -Separator der Größe  $k \geq 0$ . Im Fall  $k > 0$  ist  $S$  nach Lemma 2.27 eine Clique in  $G$ . Seien  $G[V_1]$  und  $G[V_2]$  die beiden Komponenten von  $G - S$  mit  $x_i \in V_i$ . Wir zeigen die Existenz zweier simplizialer Knoten  $s_i \in V_i$ ,  $i = 1, 2$ .

Betrachte die Teilgraphen  $G_i = G[V_i \cup S]$ . Da  $G_i$  chordal ist und weniger als  $n$  Knoten hat, ist  $G_i$  nach IV entweder eine Clique oder  $G_i$  enthält mindestens zwei nicht adjazente simpliziale Knoten  $y_i, z_i$ .

Falls  $G_i$  eine Clique ist, ist  $s_i = x_i$  simplizial in  $G_i$ , und da  $x_i$  keine Nachbarn außerhalb von  $V_i \cup S$  hat, ist  $s_i$  dann auch simplizial in  $G$ .

Ist  $G_i$  keine Clique, kann höchstens einer der beiden Knoten  $y_i, z_i$  zu  $S$  gehören (da  $S$  im Fall  $S \neq \emptyset$  eine Clique und  $\{y_i, z_i\} \notin E$  ist). O.B.d.A. sei  $y_i \in V_i$ . Dann hat  $s_i = y_i$  keine Nachbarn außerhalb von  $V_i \cup S$  und somit ist  $s_i$  auch simplizial in  $G$ . ■

**Satz 2.31.** *Ein Graph ist genau dann chordal, wenn er eine PEO hat.*

*Beweis.* Falls  $G$  chordal ist, lässt sich eine PEO gemäß Lemma 2.30 bestimmen, indem wir für  $i = n, \dots, 2$  sukzessive einen simplizialen Knoten  $u_i$  in  $G - \{u_{i+1}, \dots, u_n\}$  wählen.

Für die umgekehrte Richtung sei  $(u_1, \dots, u_n)$  eine PEO von  $G$ . Wir zeigen induktiv, dass  $G_i = G[u_1, \dots, u_i]$  chordal ist. Da  $u_{i+1}$  simplizial in  $G_{i+1}$  ist, enthält jeder Kreis  $K$  der Länge  $\geq 4$  in  $G_{i+1}$ , auf dem  $u_{i+1}$  liegt, eine Sehne zwischen den beiden Kreisnachbarn von  $u_{i+1}$ . Daher ist mit  $G_i$  auch  $G_{i+1}$  chordal. ■

**Korollar 2.32.** *Es gibt einen Polynomialzeitalgorithmus  $A$ , der für einen gegebenen Graphen  $G$  eine PEO berechnet, falls  $G$  chordal ist, und andernfalls einen induzierten Kreis der Länge  $\geq 4$  ausgibt.*

*Beweis.*  $A$  versucht wie im Beweis von Theorem 2.31 beschrieben, eine PEO zu bestimmen. Stellt sich heraus, dass  $G_i = G - \{u_{i+1}, \dots, u_n\}$  keinen simplizialen Knoten  $u_i$  hat, so ist  $G_i$  wegen Lemma 2.30 nicht chordal. Daher gibt es in  $G_i$  nach Lemma 2.27 (iii) ein Knotenpaar  $x, y$ , so dass kein  $x$ - $y$ -Separator eine Clique ist. Berechnen wir für dieses Paar einen beliebigen minimalen  $x$ - $y$ -Separator  $S$ , so ist  $S$  keine Clique und wir können wie im Beweis von (i)  $\implies$  (ii) einen induzierten Kreis  $K$  der Länge  $\geq 4$  in  $G_i$  konstruieren. Da  $G_i$  ein induzierter Teilgraph von  $G$  ist, ist  $K$  auch ein induzierter Kreis in  $G$ . ■

Eine PEO kann verwendet werden, um einen chordalen Graphen zu färben:

#### Algorithmus chordal-color( $V, E$ )

- 
- 1 berechne eine PEO  $(u_1, \dots, u_n)$  für  $G = (V, E)$
  - 2 starte greedy-color mit der Knotenfolge  $(u_1, \dots, u_n)$
- 

**Satz 2.33.** *Für einen gegebenen chordalen Graphen  $G = (V, E)$  berechnet der Algorithmus chordal-color eine  $k$ -Färbung  $c$  von  $G$  mit  $k = \chi(G) = \omega(G)$ .*

*Beweis.* Sei  $u_i$  ein beliebiger Knoten mit  $c(u_i) = k$ . Da  $(u_1, \dots, u_n)$  eine PEO von  $G$  ist, ist  $u_i$  simplizial in  $G[u_1, \dots, u_i]$ . Somit bilden die Nachbarn  $u_j$  von  $u_i$  mit  $j < i$  eine Clique und wegen  $c(u_i) = k$  bilden sie zusammen mit  $u_i$  eine  $k$ -Clique. Daher gilt  $\chi(G) \leq k \leq \omega(G)$ , woraus wegen  $\omega(G) \leq \chi(G)$  die Behauptung folgt. ■

Um chordal-color in Linearzeit zu implementieren, benötigen wir einen Linearzeit-Algorithmus zur Bestimmung einer PEO. Rose, Tarjan und Lueker haben 1976 einen solchen Algorithmus angegeben, der auf lexikographischer Breitensuche (kurz LexBFS oder LBFBS, engl. *lexicographic breadth-first search*) basiert. Bevor wir diese Variante

der Breitensuche vorstellen, gehen wir kurz auf verschiedene Ansätze zum Durchsuchen von Graphen ein.

Der folgende Algorithmus **GraphSearch**( $V, E$ ) startet eine Suche in einem beliebigen Knoten  $u$  und findet zunächst alle von  $u$  aus erreichbaren Knoten. Danach wird solange von einem noch nicht erreichten Knoten eine neue Suche gestartet, bis alle Knoten erreicht wurden. Die Menge der aktuellen Knoten wird dabei in einer Datenstruktur  $A$  gespeichert. Genauer enthält  $A$  alle bereits entdeckten Knoten, die noch nicht abgearbeitet sind.

### Algorithmus **GraphSearch**( $V, E$ )

---

```

1  $R := \emptyset$  // Menge der erreichten Knoten
2  $L := ()$  // Ausgabeliste
3 repeat
4   wähle  $u \in V \setminus R$  //  $u$  wurde neu entdeckt
5   append( $L, u$ )
6   parent( $u$ ) :=  $\perp$ 
7    $A := \{u\}$  // Menge der aktuellen Knoten
8    $R := R \cup \{u\}$ 
9   while  $A \neq \emptyset$  do
10    wähle  $u$  aus  $A$ 
11    if  $\exists v \in N(u) \setminus R$  then
12       $A := A \cup \{v\}$  //  $v$  wurde neu entdeckt
13       $R := R \cup \{v\}$ 
14      append( $L, v$ )
15      parent( $v$ ) :=  $u$ 
16    else entferne  $u$  aus  $A$  //  $u$  wurde abgearbeitet
17 until  $R = V$ 
18 return( $L$ )

```

---

Der Algorithmus **GraphSearch**( $V, E$ ) findet in jedem Durchlauf der repeat-Schleife eine neue Komponente des Eingabegraphen  $G = (V, E)$ . Dies bedeutet, dass alle Knoten, die zu einer Komponente gehören,

konsekutiv in der Ausgabeliste  $L = (u_1, \dots, u_n)$  auftreten, wobei abgesehen vom ersten Knoten jeder Komponente jeder Knoten  $u_k$  einen Nachbarn  $u_i$  mit  $i < k$  hat.

Die folgende Definition fasst diese Eigenschaften der Ausgabeliste zusammen.

**Definition 2.34.** Sei  $G = (V, E)$  ein Graph. Eine lineare Ordnung  $(u_1, \dots, u_n)$  auf  $V$  heißt **Suchordnung (SO)** von  $G$ , wenn für jedes Tripel  $j < k < l$  gilt:

$$u_j \in N(u_l) \setminus N(u_k) \Rightarrow \exists i < k : i \neq j \wedge u_i \in N(u_k).$$

**Satz 2.35.** Für jeden Graphen  $G = (V, E)$  gibt der Algorithmus **GraphSearch**( $V, E$ ) eine SO von  $G$  aus.

*Beweis.* Ein Knoten  $u_k$  erhält nur dann den Wert **parent**( $u_k$ ) =  $\perp$ , wenn alle Knoten  $u_j$  mit  $j < k$  bereits abgearbeitet sind und diese nur Nachbarn  $u_l$  mit  $l < k$  hatten. Falls also ein Vorgänger  $u_j$  von  $u_k$  mit einem Nachfolger  $u_l$  von  $u_k$  verbunden ist, liefert die **parent**-Funktion einen Nachbarn  $u_i = \mathbf{parent}(u_k)$  von  $u_k$  mit  $i < k$ . Da  $u_j \notin N(u_k)$  ist, gilt zusätzlich  $i \neq j$ . ■

Die **parent**-Funktion induziert einen gerichteten Wald  $W = (V, E_{\mathbf{parent}})$ , dessen Kantenmenge aus allen Kanten der Form (**parent**( $v$ ),  $v$ ) mit **parent**( $v$ )  $\neq \perp$  besteht. Die Kanten von  $W$  werden auch als **Baumkanten** (kurz **B-Kanten**) und  $W$  wird auch als **Suchwald** von  $G = (V, E)$  bezeichnet. Für jeden Knoten  $v \in V$  gibt es genau eine Wurzel  $w$  in  $W$ , von der aus  $v$  in  $W$  erreichbar ist. Der eindeutig bestimmte  $w$ - $v$ -Pfad  $P = (u_0, \dots, u_l)$  in  $W$  mit  $u_0 = w$  und  $u_l = v$  lässt sich ausgehend von  $u_l = v$  unter Verwendung der **parent**-Funktion mittels  $u_{i-1} = \mathbf{parent}(u_i)$  für  $i = l, \dots, 1$  berechnen.  $P$  wird auch als **parent-Pfad** von  $v$  bezeichnet. Es ist klar, dass 2 Knoten  $v$  und  $v'$  genau dann in einer Komponente von  $G$  liegen, wenn sie die gleiche Wurzel haben.

Realisieren wir die Menge der aktuellen Knoten als einen Keller  $S$ , so erhalten wir eine Suchstrategie, die als **Tiefensuche** (kurz *DFS*, engl. *depth first search*) bezeichnet wird. Die Benutzung eines Kellers bewirkt, dass nach der Entdeckung eines neuen Knotens  $v$  unter den Nachbarn des aktuellen Knotens  $u$  die Suche zuerst bei den Nachbarn von  $v$  fortgesetzt wird, bevor die anderen Nachbarn von  $u$  getestet werden.