Übungsblatt 7

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 17. Januar 2019

Aufgabe 33 ***mündlich***

Wie lässt sich in einem Netzwerk, dessen Kanten e nicht nur eine Maximalkapazität $c_{\max}(e)$, sondern auch eine Mindestkapazität $c_{\min}(e)$ haben, ein maximaler und ein minimaler Fluss f bestimmen? Dabei soll $f(e)$

(a) zwischen der Mindest- und Maximalkapazität liegen,

(b) zwischen der Mindest- und Maximalkapazität liegen oder 0 sein.

Aufgabe 34 Sei $G = (V, E)$ ein azyklischer Digraph. ***mündlich***

(a) Zeigen Sie, dass für jede bzgl. Inklusion maximale Menge $M = \{P_1, \dots, P_k\}$ von disjunkten Pfaden P_i in G gilt: $n = k + |E_M|$, wobei E_M die Menge aller Kanten in M bzw. $|E_M| = \sum_{i=1}^{k} l(P_i)$ die Summe der Pfadlängen ist.

(b) Entwerfen Sie einen möglichst effizienten Algorithmus, der für G eine möglichst kleine Menge von disjunkten Pfaden bestimmt, die alle Knoten überdecken.
Hinweis: Erweitern Sie den Digraphen $G_0 = (U, E_0)$ mit $U = \{s, t\} \cup U' \cup U''$, $U' = \{u' \mid u \in V\}$, $U'' = \{u'' \mid u \in V\}$ und $E_0 = (\{s\} \times U') \cup (U'' \times \{t\})$ zu einem Netzwerk N, so dass jeder Fluss f in N zu einer Menge von disjunkten Pfaden mit insgesamt $|f|$ Kanten korrespondiert.

(c) Lösen Sie (a), falls die gesuchten Pfade nicht disjunkt sein müssen.
Hinweis: Erweitern Sie G_0 zu einem Netzwerk N' mit Mindestkapazitäten, so dass jeder Fluss f in N' zu einer Menge von $|f|$ Pfaden korrespondiert, die alle Knoten überdecken.

(d) Zwei Knoten $u, v \in V$ heißen nebenläufig (engl. *concurrent*), wenn es in G keinen Pfad gibt, auf dem beide Knoten liegen. Zeigen Sie, dass die maximale Anzahl von paarweise nebenläufigen Knoten in G mit der minimalen Anzahl von nicht notwendigerweise disjunkten Pfaden in G übereinstimmt, die alle Knoten überdecken.

(e) Zeigen Sie, dass man in d) verlangen kann, dass die Pfade disjunkt sind, falls E transitiv ist (Satz von Dilworth).

(f) Was ändert sich, wenn G nicht azyklisch ist?

Aufgabe 35 ***mündlich***

Sei f ein maximaler Fluss in einem Netzwerk N und e eine Kante in N. Entwerfen Sie einen möglichst effizienten Algorithmus, der aus f einen maximalen Fluss im Netzwerk N' berechnet, das aus N durch

(a) Erhöhen der Kapazität von e um 1 entsteht.

(b) Erniedrigen der Kapazität von e um 1 entsteht.

Aufgabe 36 Sei G ein Graph. ***10 Punkte***

Die *Kantenzusammenhangszahl* $\lambda(G)$ von G ist die größte Zahl $\ell < n$, so dass $G - E'$ für jede Menge E' von $\ell - 1$ Kanten zusammenhängend ist. G heißt *ℓ-kantenzusammenhängend*, falls $\lambda(G) \geq \ell$ ist.

(a) Zeigen Sie, dass $\kappa(G) \leq \lambda(G)$ ist.

(b) Finden Sie einen Algorithmus, der in Linearzeit testet, ob ein Graph G 2-kantenzusammenhängend ist.

(c) Finden Sie einen Algorithmus, der in Zeit $O(knm)$ testet, ob ein Graph G k-kantenzusammenhängend ist.

(d) Finden Sie einen $O(nm \min\{\lambda(G), n^{2/3}\})$ Algorithmus, der $\lambda(G)$ berechnet. *Bemerkung:* Die Laufzeit kann auf $O(nm)$ verbessert werden.