Adäquatheit der Formalisierung

Adäquatheit:

Die wesentlichen Aspekte werden in der Struktur S bzw. den Axiomen **Ax** korrekt erfaßt.

–Parallelen-Axiom der Geometrie

–Stetigkeitsdefinition in der Analysis

–Modellierung eines Staubsaugers

Syntax des PK1

- Terme: Individuen (Konstante, Variable, Funktionen)
- Prädikate (atomare Formeln):

  Relationen $R(x_1,...,x_n)$ (wahr/falsch)
- Ausdrücke:

  logische Beziehungen zwischen Prädikaten mittels
  - Aussagenlogischen Operatoren $\neg \wedge \vee \leftrightarrow \rightarrow$
  - Quantifikation von Variablen $\forall \exists$

    z.B. $\forall x \exists y\, R(x, x_1,...,x_n) \wedge \neg R(y, x_1,...,x_n)$

Positives Literal: nicht negierte atomare Formel

Negatives Literal: negierte atomare Formel

Syntax des PK1

Ableiten: Ausdrücke umformen mit Ableitungsregeln

z.B. Abtrennungsregel (modus ponens)

$$\frac{H_1 \ , \ H_1 \rightarrow H_2}{H_2}$$

H *ableitbar aus* **X** **,**

falls Ableitungsfolge für H aus **X** existiert

X |- H oder: H $\in$ **X**|- oder: H $\in$ Abl(**X**)

Allgemeingültigkeit, Erfüllbarkeit

Belegung β erfüllt den Ausdruck H in der Struktur S = [U, I] , falls Wert_S (H, β) = W.

(Rein logische) Erfüllbarkeit eines Ausdrucks H:

H heißt erfüllbar, falls β, U,I existieren mit $\text{Wert}_{[U,I]}$ (H, β) = W.

ef : Menge aller erfüllbaren Ausdrücke

(Rein logische) Allgemeingültigkeit eines Ausdrucks H:

H heißt allgemeingültig, falls $\text{Wert}_{[U,I]}$ (H, β) = W für alle β, U,I .

ag : Menge aller allgemeingültigen Ausdrücke

Freie Variable werden bei Allgemeingültigkeit wie generalisierte Variable behandelt.

Allgemeingültigkeit, Erfüllbarkeit im PK1

- H ist allgemeingültig gdw. ¬H nicht erfüllbar ist.
- H ist erfüllbar gdw. ¬H nicht allgemeingültig ist.
- **ag** axiomatisierbar:
- Es gibt aufzählbares Axiomensystem **axp** mit **ag** = Abl(**axp**)
- Satz von Church:

  Erfüllbarkeit/Allgemeingültigkeit sind unentscheidbar.

Menge der allgemeingültigen Ausdrücke: axiomatisierbar.
Menge der nicht erfüllbaren Ausdrücke: axiomatisierbar.

Menge der nicht allgemeingültigen Ausdrücke: nicht axiomat.
Menge der erfüllbaren Ausdrücke: nicht axiomatisierbar.

Axiomatisierbar = aufzählbar = partiell entscheidbar
M entscheidbar gdw. M und U-M aufzählbar

Folgern im PK1

Eine Struktur S = [U, I] und eine Belegung β
sind ein *Modell* für eine Menge **X** von Ausdrücken,
wenn für alle H $\in$ **X** gilt:
β erfüllt H in der Struktur S = [U, I] , d.h. $\mathrm{Wert}_S(H, \beta) = W$.

Es sei **X** eine Menge von Ausdrücken, H ein Ausdruck.
H *folgt aus* **X** , falls gilt:
Jedes Modell von **X** ist ein Modell von H .

X |= H oder: H $\in$ **X**|= oder: H $\in$ Fl(**X**)